

高压物理学报

石墨烯环氧树脂基复合材料梁屈曲前后的自由振动

张辉 宋救洵

Free Vibrations of Pre/Post-Buckled Graphene-Reinforced Epoxy Resin Matrix Nanocomposite Beams

ZHANG Hui, SONG Mitao

引用本文:

张辉, 宋救洵. 石墨烯环氧树脂基复合材料梁屈曲前后的自由振动[J]. 高压物理学报, 2019, 33(5):000000. DOI: 10.11858/gywlb.20190701

ZHANG Hui, SONG Mitao. Free Vibrations of Pre/Post-Buckled Graphene-Reinforced Epoxy Resin Matrix Nanocomposite Beams[J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 2019, 33(5):000000. DOI: 10.11858/gywlb.20190701

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.11858/gywlb.20190701>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

轴向载荷下功能梯度材料Timoshenko梁动力屈曲分析

Dynamic Buckling of Functionally Graded Timoshenko Beam under Axial Load

高压物理学报. 2018, 32(4): 044104 <https://doi.org/10.11858/gywlb.20180509>

轴向荷载下功能梯度材料圆柱壳的动力屈曲

Dynamic Buckling of Functionally Graded Cylindrical Shells under Axial Loading

高压物理学报. 2018, 32(5): 054102 <https://doi.org/10.11858/gywlb.20180502>

轴向冲击载荷作用下梯度圆管的动力学行为

Dynamic Crushing Behavior of Graded Hollow Cylindrical Shell under Axial Impact Loading

高压物理学报. 2017, 31(6): 778 <https://doi.org/10.11858/gywlb.2017.06.013>

截面几何参数对帽型梁轴向冲击响应的影响

Effect of Sectional Geometric Parameters on Axial Impact Response of Hat-Section Beam

高压物理学报. 2018, 32(5): 054203 <https://doi.org/10.11858/gywlb.20180521>

爆炸冲击波在仿桥梁结构内传播的数值模拟

Numerical Simulation of Explosive Shock Wave Propagation in Imitation Bridge Structure

高压物理学报. 2019, 33(4): 042301 <https://doi.org/10.11858/gywlb.20180649>

局部激光辐照下薄板结构的屈曲承载力分析

Buckling Analysis of Thin-Walled Structures under Local Laser Irradiation

高压物理学报. 2016, 30(2): 142 <https://doi.org/10.11858/gywlb.2016.02.009>

石墨烯环氧树脂基复合材料梁屈曲前后的自由振动

张辉, 宋救淘

(江苏大学土木工程与力学学院, 江苏 镇江 212013)

摘要: 采用微分求积法分析了石墨烯增强纳米复合材料梁屈曲前后的自由振动问题。考虑石墨烯纳米片在基体中随机排列和定向排列的情况, 采用 Halpin-Tsai 微观力学模型估算两种模式下石墨烯纳米复合材料的弹性模量, 并通过 Hamilton 原理建立基于一阶剪切变形理论下梁的动力学控制方程。利用微分求积法计算得到石墨烯纳米复合材料梁的临界屈曲载荷及屈曲前后的固有频率。数值计算结果表明: 按合理排列模式掺杂较多的薄石墨烯纳米片, 会大幅度提高梁的临界屈曲载荷以及屈曲前的固有频率; 但屈曲发生后, 同样的做法却会使结构的刚度降低。

关键词: 石墨烯; 分布模式; 微分求积法; 屈曲; 固有频率

中图分类号: O343

文献标识码: A

石墨烯是构成其他碳族材料, 如碳纳米管、石墨等的基本单元, 其形貌类似于薄纸的片层结构, 单层厚度仅为 0.335 nm, 是目前发现的最薄二维材料。石墨烯的力学性能优异, 理论强度可达 125 GPa (是钢的 100 倍), 弹性模量为 1.0 TPa, 能与碳纳米管相媲美, 且具有大变形、可再生、高分散性及良好的化学和生物相容性^[1], 因此已经成为纳米复合材料中的理想增强体。

Rahman 等^[2] 采用分子力学和分子动力学模拟研究了石墨烯环氧树脂基纳米复合材料, 结果表明, 在环氧树脂基体中加入石墨烯纳米片 (GPL), 可以显著改善基体材料的杨氏模量和剪切模量。Ji 等^[3] 使用 Mori-Tanaka 微观力学方法研究了石墨烯纳米片对聚合物纳米复合材料的硬化效应, 发现混合低体积分含量的石墨烯纳米片可以明显提高基体材料的有效刚度。King 等^[4] 实验测量了石墨烯环氧树脂基复合材料的物性参数, 发现通过添加石墨烯纳米片可以显著提高环氧树脂的弹性模量, 且结果与 Halpin-Tsai 模型的预测一致。Zhao 等^[5] 经过实验发现, 石墨烯纳米片在基体中的机械渗透率为 1.8%, 即: 低于此含量, 石墨烯纳米片可以很好地分散在聚合物基体中, 从而使复合材料的力学性能得到改善; 而高于此含量, 则容易使石墨烯纳米片因范德华力团聚在一起, 从而削弱增强效果。Rafiee 等^[6] 通过实验研究了石墨烯增强环氧树脂基复合材料梁的屈曲行为, 发现与纯基体梁相比, 质量分数为 0.1% 的石墨烯纳米复合材料梁的屈曲载荷提高了 52%。Nguyen 等^[7] 研究了基于一阶剪切变形理论下轴向受压石墨烯纳米功能梯度梁的静态屈曲和自由振动。Parashar 和 Mertiny^[8] 通过有限元分析了单轴受压石墨烯增强环氧树脂板的屈曲行为。Yang 等^[9-10] 研究了基于 Timoshenko 梁理论下石墨烯增强纳米复合材料梁的非线性弯曲和后屈曲行为, 结果表明掺杂石墨烯纳米片的复合材料梁在温度场作用下表现出更优的力学性能。需要指出的是, 上述研究都基于石墨烯纳米片随机分布在基体中的情形。

近年来, 随着科技的进步和制造工艺的日臻完善, 研究者已经可以使石墨烯定向排列在基体中, 主要的实现方法有溶液浇铸法^[11]、外场诱导法^[12] 和真空抽滤法^[13]。相对于随机分布, 石墨烯纳米片定向排列时片层与基体材料间的界面作用力更大, 能有效抑制聚合物链的滑移, 可以显著提高复合材料的综合性能^[14]。因此对比分析石墨烯纳米片在两种分布模式下, 复合材料梁的静态屈曲问题及屈曲附近的振动问题具有非常重要的工程指导意义。

* 收稿日期: 2019-01-03; 修回日期: 2019-01-23

基金项目: 国家自然科学基金 (11302087); 江苏省自然科学基金 (BK20130479)

作者简介: 张辉 (1991—), 男, 硕士研究生, 主要从事结构动力学研究. E-mail: 18605240606@163.com

通信作者: 宋救淘 (1984—), 男, 博士, 副教授, 主要从事结构动力学研究. E-mail: songmt2004@163.com

本研究利用 Halpin-Tsai 微观力学模型^[15] 计算石墨烯纳米复合材料的杨氏模量和剪切模量, 通过 Hamilton 原理建立基于一阶剪切应变理论下梁的动力学控制方程, 采用微分求积法^[16] 求解系统的临界屈曲力及屈曲前后的自振频率, 研究石墨烯纳米片的分布模式、体积含量以及几何尺寸对石墨烯纳米复合材料梁的临界屈曲载荷及屈曲前后固有频率的影响。

1 材料参数

石墨烯纳米片在基体中主要存在两种排列模式: 随机排列和定向排列, 如图 1 所示。本研究将石墨烯纳米片随机排列状态下的梁称为 R-梁, 定向排列状态下的梁称为 W-梁(梁在坐标系 1-2 面内振动)和 L-梁(梁在坐标系 1-3 面内振动)。

Halpin-Tsai 模型^[17] 被广泛用于预测石墨烯纳米片单向或随机排列状态下复合材料的模量参数, 其微观力学模型如下。

(1) 随机排列模式

$$E_R = \frac{3}{8} \frac{1 + (2L_G/3T_G)\eta_M V_G}{1 - \eta_L V_G} \times E_M + \frac{5}{8} \frac{1 + 2\eta_N V_G}{1 - \eta_W V_G} \times E_M \quad (1)$$

$$G_R = E_R/2(1 + \nu_C) \quad (2)$$

其中参数 η_M 、 η_N 分别为

$$\eta_M = \frac{E_G/E_M - 1}{E_G/E_M + 2L_G/3T_G}, \quad \eta_N = \frac{E_G/E_M - 1}{E_G/E_M + 2} \quad (3)$$

(2) 定向排列模式

$$E_{W/L} = \frac{1 + (2L_G/3T_G)\eta_E V_G}{1 - \eta_E V_G} E_M \quad (4)$$

$$G_{ij} = \frac{1 + \zeta \eta_G V_G}{1 - \eta_G V_G} G_M \quad (5)$$

其中参数 η_E 、 η_G 分别为

$$\eta_E = \frac{E_G/E_M - 1}{E_G/E_M + 2L_G/3T_G}, \quad \eta_G = \frac{G_G/G_M - 1}{G_G/G_M + \zeta} \quad (6)$$

式中: 下标 R、W、L 分别表示 R-梁、W-梁、L-梁, 下标 G、M 分别表示石墨烯纳米片和基体材料; L_G 、 T_G 和 V_G 分别表示石墨烯纳米片的平均长度、厚度以及其在基体中的体积分; E 、 G 分别表示材料的杨氏模量和剪切模量; ζ 表示增强因子, 其数值大小由表 1 给出^[18]。特别说明的是, 石墨烯纳米片定向排列时, 复合材料为横观各向同性, 因此 L-梁和 W-梁的弹性模量相同, 而剪切模量需要分别讨论。

复合材料的密度 ρ_C 和泊松比 ν_C 可由混合定律估算

$$\rho_C = \rho_G V_G + \rho_M V_M \quad (7)$$

$$\nu_C = \nu_G V_G + \nu_M V_M \quad (8)$$

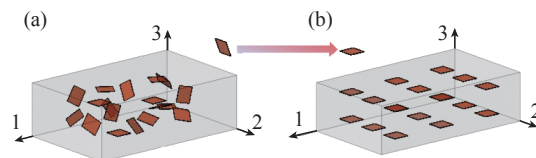


图 1 石墨烯纳米片在基体材料中的排列模式:
(a) 随机排列; (b) 定向排列

Fig. 1 Arrangement modes of graphene nanosheets in matrix materials: (a) random distribution; (b) orientation distribution

表 1 定向排列状态下片状增强纳米复合材料增强因子
Table 1 Enhancement factors of flake reinforced nanocomposites

Material parameter	ζ
G_{12}	$3L_G/4T_G$
G_{13}, G_{23}	L_G/T_G

2 控制方程

由冯卡门非线性应变-位移关系得

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + z \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right]^2 \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \phi(x,t) \end{cases} \quad (9)$$

式中: u 、 ϕ 和 w 分别代表梁的轴向位移、横截面转角和横向位移。则梁的动能 K 、外激励做功 Θ 和应变能 U 可以表示为

$$K = \frac{\rho}{2} \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + z \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dz \quad (10)$$

$$\Theta = \frac{1}{2} \int_0^l T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (11)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ E \left[\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right)^2 \right\} dx dz \quad (12)$$

式中: l 、 h 分别为梁的长度和高度, T 为梁端中性面上的均布轴向力。

由哈密顿原理, 即 $\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - U + \Theta) dt = 0$, 可以得到

$$\begin{cases} a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + a_{11} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ a_{55} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \left[a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + b_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} a_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - T \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ b_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b_{11} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) = I_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \end{cases} \quad (13)$$

刚度和惯性的相关参数分别为

$$(a_{11}, b_{11}, d_{11}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_C (1, z, z^2) dz \quad (14)$$

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_C (1, z, z^2) dz, \quad a_{55} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G_C dz \quad (15)$$

梁的轴力、弯矩和剪力分别为

$$N_x = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + b_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} a_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (16)$$

$$M_x = b_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + d_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} b_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (17)$$

$$Q_x = a_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) \quad (18)$$

则边界条件可以表示为

$$\text{固支端 (C)} \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \phi = 0 \quad (19)$$

$$\text{简支端 (S)} \quad u = 0, \quad w = 0, \quad b_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + d_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} b_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = 0 \quad (20)$$

3 求解方法

对于含有初值条件的偏微分方程,因其解析解通常无法由理论推导获得,所以一种有效的半解析数值方法——微分求积(DQ)法^[16]被广泛应用于工程计算领域。它的基本思想是将函数在某点处的偏导数用全域内所有节点函数值的加权和来表示,具有数学原理简单、精度高、收敛快等特点。先采用DQ法将控制方程离散处理,之后通过简单的数学变换,发现可以将控制方程转变成特征值问题进行求解,故而大幅度地降低了计算难度,简化了问题求解。

利用切比雪夫公式对梁的轴线进行离散

$$x_i = \frac{l}{2} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\pi(i-1)}{N-1} \right] \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

由微分求积法有

$$\begin{cases} \{u, w, \phi\} = \sum_{j=1}^N l_j \{u_j, w_j, \phi_j\} \\ \left. \frac{\partial^k}{\partial x^k} \{u, w, \phi\} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(k)} \{u_j, w_j, \phi_j\} \end{cases} \quad (22)$$

式中: l_j 为拉格朗日插值多项式, $H_{ij}^{(k)}$ 为加权系数

$$H_{ij}^{(k)} = l_j^{(k)}(x_i) = \begin{cases} k \left[l_i^{(k-1)}(x_i) l'_j(x_i) - \frac{l_i^{(k-1)}(x_i)}{x_i - x_j} \right] & (i \neq j) \\ - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N l_m^{(k)}(x_i) & (i = j) \end{cases} \quad (23)$$

则控制方程组(13)式可离散为

$$\begin{cases} a_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} u_j + b_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \phi_j + a_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} w_j \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} w_j = I_1 \ddot{u}_i + I_2 \ddot{\phi}_i \\ a_{55} \left(\sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} w_j + \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} \phi_j \right) + \left[a_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} u_j + b_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} \phi_j + \frac{1}{2} a_{11} \left(\sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} w_j \right)^2 - T \right] \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} w_j = I_1 \ddot{w}_i \\ b_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} u_j + d_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \phi_j + b_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} w_j \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} w_j - a_{55} \left(\sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} w_j + \phi_j \right) = I_2 \ddot{u}_i + I_3 \ddot{\phi}_i \end{cases} \quad (24)$$

边界条件可类似地离散,此处略去该过程。将(24)式的解写成静态和动态两部分

$$\begin{cases} u(x_j, t) = u_s(x_j) + u_\Gamma(x_j, t) \\ w(x_j, t) = w_s(x_j) + w_\Gamma(x_j, t) \\ \phi(x_j, t) = \phi_s(x_j) + \phi_\Gamma(x_j, t) \end{cases} \quad (25)$$

式中:下标s表示梁的静态屈曲解,下标 Γ 表示梁在屈曲附近的振动解。

对于静态屈曲问题,其控制方程可以表示为

$$\begin{cases} a_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} u_{sj} + b_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \phi_{sj} + a_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} w_{sj} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} w_{sj} = 0 \\ a_{55} \left(\sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} w_{sj} + \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} \phi_{sj} \right) + \left[a_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} u_{sj} + b_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} \phi_{sj} + \frac{1}{2} a_{11} \left(\sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} w_{sj} \right)^2 - T \right] \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} w_{sj} = 0 \\ b_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} u_{sj} + d_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \phi_{sj} + b_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} w_{sj} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} w_{sj} - a_{55} \left(\sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} w_{sj} + \phi_{sj} \right) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

根据 (26) 式及边界条件, 采用权系数矩阵修正法^[19] 处理刚度矩阵, 可建立如下特征值问题

$$(\mathbf{K}_{L1} - T\mathbf{K}_{L2} + \mathbf{K}_{NL1} + \mathbf{K}_{NL2})\mathbf{d}_s = \mathbf{0} \quad (27)$$

式中: $\mathbf{d}_s = \{\{u_{sj}\}^T, \{w_{sj}\}^T, \{\phi_{sj}\}^T\}^T$, $\mathbf{K}_{L1}$ 和 $\mathbf{K}_{L2}$ 为常系数刚度矩阵, $\mathbf{K}_{NL1}$ 和 $\mathbf{K}_{NL2}$ 为非线性矩阵, 其中元素分别为 $\mathbf{d}_s$ 的一次和二次函数。

去掉 (27) 式的非线性项, 可以得到系统的标准特征值方程

$$(\mathbf{K}_{L1} - T_{cr}\mathbf{K}_{L2})\mathbf{d}_s = \mathbf{0} \quad (28)$$

求解 (28) 式, 即可得到系统的临界屈曲荷载 T_{cr} 和屈曲模态 $\mathbf{d}_s$ 。

对于动态振动问题, 考虑微幅振动, 假设系统的解为

$$\begin{cases} \{u(x_j, t), w(x_j, t), \phi(x_j, t)\} = \bar{\mathbf{d}}_s + \bar{\mathbf{d}}_r e^{i\omega t} \\ \bar{\mathbf{d}}_s = \{\bar{u}_{sj}, \bar{w}_{sj}, \bar{\phi}_{sj}\}, \quad \bar{\mathbf{d}}_r = \{\bar{u}_{\Gamma j}, \bar{w}_{\Gamma j}, \bar{\phi}_{\Gamma j}\} \end{cases} \quad (29)$$

式中: ω 为固有频率。需要指出的是, 当轴向力 T 小于临界屈曲力 T_{cr} , $\bar{\mathbf{d}}_s$ 取 $\mathbf{0}$, 轴向力 T 大于临界屈曲力 T_{cr} , $\bar{\mathbf{d}}_s$ 取系统屈曲后的新平衡解, 其值可由非线性特征方程 (27) 式通过迭代法求解得到。则含动态解的控制方程可以表示为

$$\begin{cases} a_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \bar{u}_{\Gamma j} + a_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \bar{w}_{sj} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} \bar{w}_{\Gamma j} + a_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} \bar{w}_{sj} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \bar{w}_{\Gamma j} + b_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \bar{\phi}_{\Gamma j} = -\omega^2 (I_1 \bar{u}_{\Gamma i} + I_2 \bar{\phi}_{\Gamma i}) \\ a_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \bar{w}_{sj} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} \bar{u}_{\Gamma j} + a_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} \bar{w}_{sj} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \bar{w}_{\Gamma j} + \left(a_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} \bar{u}_{sj} + b_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} \bar{\phi}_{sj} \right) \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \bar{w}_{\Gamma j} + \\ \left[\frac{1}{2} a_{11} \left(\sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} \bar{w}_{sj} \right)^2 + a_{55} - T \right] \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \bar{w}_{\Gamma j} + \left(a_{55} + b_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \bar{w}_{sj} \right) \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} \bar{\phi}_{\Gamma j} = -\omega^2 I_1 \bar{w}_{\Gamma i} \\ b_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \bar{u}_{\Gamma j} + \left(b_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \bar{w}_{sj} - a_{55} \right) \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} \bar{w}_{\Gamma j} + b_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(1)} \bar{w}_{sj} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \bar{w}_{\Gamma j} + \\ d_{11} \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(2)} \bar{\phi}_{\Gamma j} - a_{55} \bar{\phi}_{\Gamma i} = -\omega^2 (I_2 \bar{u}_{\Gamma i} + I_3 \bar{\phi}_{\Gamma i}) \end{cases} \quad (30)$$

(30) 式忽略了动态位移非线性项。结合 (30) 式及边界条件, 采用权系数矩阵修正法, 可以得到如下方程

$$(\mathbf{K}_T - \omega^2 \mathbf{M})\bar{\mathbf{d}}_r = \mathbf{0} \quad (31)$$

式中: $\mathbf{K}_T$ 为含轴向力的变刚度矩阵, $\mathbf{M}$ 为质量矩阵。求解 (31) 式的特征值 ω^2 和特征向量 $\bar{\mathbf{d}}_r$, 即可得到石墨烯纳米复合材料梁在屈曲前后的固有频率和振型。

4 数值结果与讨论

以石墨烯-环氧树脂基复合材料为例, 分析石墨烯纳米片的排列方式、几何尺寸及体积分数对环氧树脂基复合材料梁的临界屈曲力及屈曲附近振动的影响。两种材料的物性参数如表 2 所示。如不特别说明, 石墨烯纳米片的长度和厚度分别取 $1 \mu\text{m}$ 和 0.8 nm , 体积分数取 1.8% , 梁的截面尺寸为 $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$, 长度为 1 m 。需要特别说明的是, 作为一种二维材料, 石墨烯纳米片只存在面内剪切模量, 即 $G_{G(13)} = G_{G(23)} = 0$ ^[20]。

表 2 环氧树脂及石墨烯的材料参数

Table 2 Material parameters of epoxy resins and GPLs

Material	Young's modulus /GPa	Shear modulus /GPa	Density/(kg·m ⁻³)	Poisson's ratio
Epoxy resins ^[21]	3.0	1.12	1200	0.34
Graphene platelets ^[22-23]	1010	280	1062.5	0.186

不同约束方式下,3种梁的第1阶临界屈曲荷载如表3所示。通过与欧拉梁临界屈曲荷载表达式 $T_{cr} = n^2 \pi^2 EI / (\mu l)^2$ (μ 为长度因数) 计算的结果进行对比,发现微分求积法求解的数值解具有良好的精度。值得注意的是,因欧拉伯努利梁忽略了截面剪切力的影响,故采用上述解析表达式算得的R-梁和L-梁的临界屈曲荷载没有区别。这同时也说明,研究石墨烯纳米片定向排列情况时,必须考虑剪切力的影响,需采用一阶或高阶剪切梁理论。从表3还可以看出,在相同的约束条件下,W-梁与L-梁具有比R-梁更高的临界荷载,说明石墨烯纳米片定向排列模式下的复合材料梁的结构稳定性优于石墨烯纳米片随机排列的情况。同时,两端固支约束(C-C)下,石墨烯纳米复合材料梁的屈曲荷载最大,一端固支一端简支(C-S)约束下次之,两端简支(S-S)约束下最小,与预期结果吻合。

表3 不同约束下石墨烯纳米复合材料梁的一阶屈曲荷载
Table 3 The first-order critical buckling load of graphene-reinforced nanocomposite beams with different boundary conditions

Boundary condition	R-beam		L-beam		W-beam	
	Euler beam	This work	Euler beam	This work	Euler beam	This work
S-S	40.93	40.76	82.16	79.87	82.16	81.72
C-C	163.71	160.36	328.65	293.84	328.65	320.72
C-S	83.53	82.98	167.68	158.00	167.68	166.23

图2显示了不同参数对石墨烯纳米复合材料梁第1阶临界屈曲荷载的影响。以两端固支约束为例,分析了石墨烯纳米片在基体中的体积分数对梁的第1阶临界屈曲荷载的影响,结果如图2(a)所示。可以看出,石墨烯纳米复合材料梁的临界屈曲力受石墨烯浓度的影响很大,例如,石墨烯体积分数为1.8%的W-梁,其第1阶临界屈曲荷载约为纯环氧树脂梁的6倍。以W-梁为例,研究了石墨烯纳米片的长厚比对梁的第1阶临界屈曲荷载的影响,结果如图2(b)所示。可以看出:当长厚比 L_G/T_G 低于2000时,W-梁的临界屈曲力受其影响较大;超过2000时,则影响不明显。其原因是石墨烯纳米片过大的比表面积引起了团聚现象^[24]。图2(c)显示了两端简支石墨烯纳米复合材料梁的长细比对梁的临界屈曲荷载的影响。可以看出,随着长细比的增加,3种梁的临界屈曲荷载皆逐渐减小,与预期相符。图3简单介绍了S-S约束下R-梁的前4阶临界屈曲模态。从图3中发现,轴向力取各阶临界屈曲荷载时,梁表现出相应阶的屈曲模态,这种现象符合系统的稳定性理论,即低阶模态会逐渐向高阶模态跃迁。

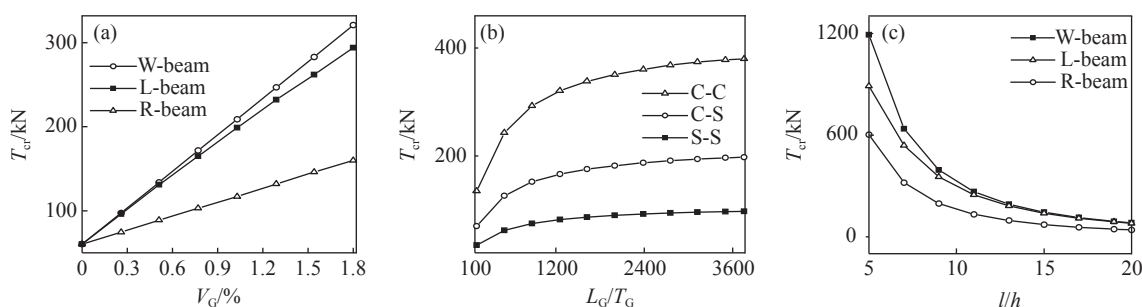


图2 不同条件下石墨烯纳米复合材料梁的临界屈曲荷载: (a) 石墨烯纳米片的浓度不同; (b) 石墨烯纳米片的长厚比不同; (c) 梁的长细比不同

Fig. 2 Critical buckling loads of graphene-reinforced nanocomposite beams under different conditions: (a) different concentrations of GPLs; (b) different aspect ratios of GPLs; (c) different length-to-thickness ratios of beams

以两端简支梁为例,研究了轴向力作用下梁在第1阶屈曲附近的基频随参数的变化规律,结果如图4~图7所示。可以发现,梁在轴力等于临界屈曲荷载时具有零基频现象。图4给出了石墨烯排列模式对梁屈曲前后基频的影响规律。可以看出:在屈曲发生前,R-梁、W-梁以及L-梁的基频都随着轴向力的增大而降低,同时W-梁和L-梁的基频显著高于R-梁,即定向排列的情况比随机排列情况能更好

地提高梁的刚度。其原因是石墨烯纳米片定向排列时片层与基体材料间的界面作用力更大,能有效抑制聚合物链的滑移,故而显著提高了纳米复合材料的力学性能^[14],同时也在所考虑的两种定向排列情况下,W-梁比L-梁的基频稍高。然而发生屈曲后,情况正好相反,即随机排列模式下梁的基频反而大大高于定向排列模式,同时L-梁的基频比W-梁稍高。图5显示了石墨烯体积分数对梁屈曲前后基频的影响。可以看出,石墨烯浓度越大,屈曲前梁的基频越大,屈曲后梁的基频反而越小。图6给出了石墨烯纳米片长厚比对梁屈曲前后基频的影响。可以看出,发生屈曲之前, L_G/T_G 增大会提高梁的基频;发生屈曲后, L_G/T_G 增大反而会降低梁的基频。图7比较了不同边界条件对梁屈曲前后基频的影响。可以看出:屈曲前两端固支梁具有最高基频,一端固支一端简支梁次之,两端简支梁基频最低;屈曲后,现象正好相反。

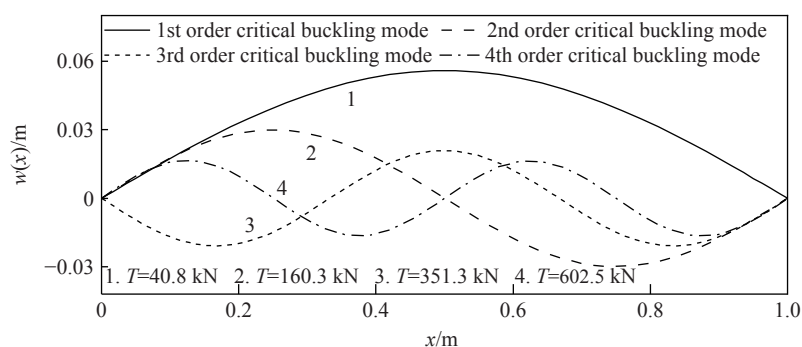


图 3 S-S 约束下 R-梁的前 4 阶临界屈曲模态

Fig. 3 The first four-order critical buckling modes of R-beam under S-S boundary condition

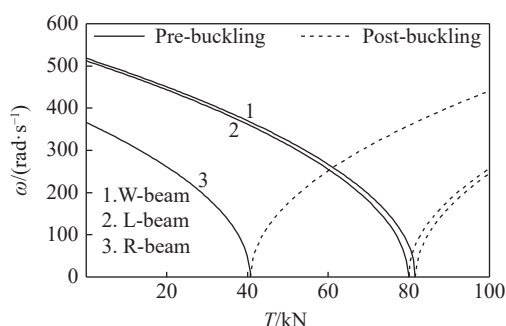


图 4 轴向力对不同模式梁第一阶固有频率的影响

Fig. 4 Effect of axial force on the first-order natural frequency of beams with different GPL distribution modes

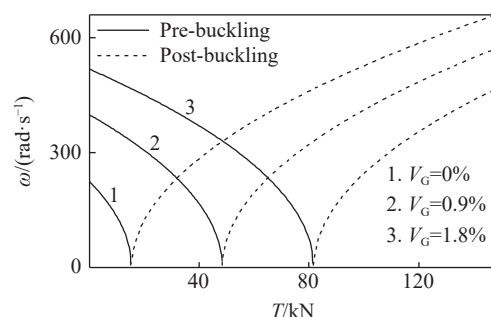


图 5 轴向力对不同浓度下 W-梁固有频率的影响

Fig. 5 Effect of axial force on natural frequencies of W-beam with different graphene concentrations

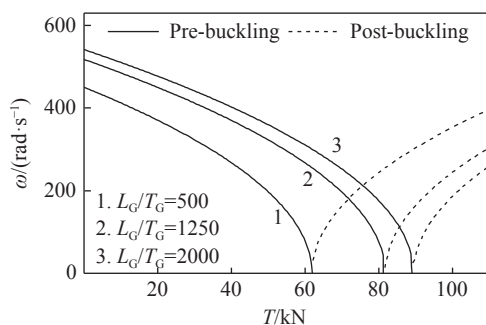


图 6 不同长厚比的 GPLs 对梁固有频率的影响

Fig. 6 Effect of GPL length-to-thickness ratio on the natural frequencies of beams

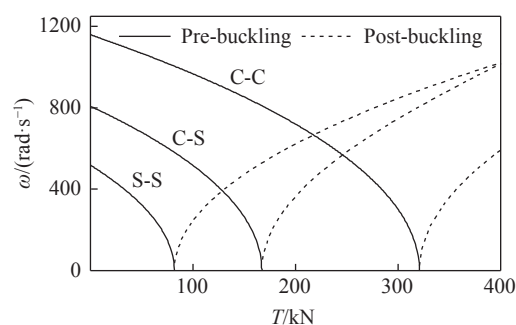


图 7 轴向力对不同约束下梁固有频率的影响

Fig. 7 Effect of axial force on the natural frequencies of beams with different boundary conditions

5 结 论

分析了石墨烯纳米复合材料梁的临界屈曲荷载及屈曲附近的自由振动特性。考虑石墨烯纳米片不同的排列模式,采用一阶剪切梁理论建立梁的控制方程,并应用微分求积法进行数值求解,得到如下主要结果:

(1)掺杂少量的石墨烯纳米片或石墨烯纳米片以定向的模式排列时,梁的临界屈曲载荷可以得到大幅提高。当石墨烯纳米片在同样浓度及排列模式下,宽厚比取2000左右时,梁的临界屈曲载荷达到最优。

(2)石墨烯纳米片定向排列模式下的梁,其抗屈曲能力优于随机排列的情况。这是因为石墨烯纳米片定向排列时片层与基体材料间的界面作用力更大,可以有效提高界面荷载的传递能力。同时在两种定向排列模式中,W-梁比L-梁具有更好的结构稳定性。

(3)屈曲发生前,轴向压力的增大会降低石墨烯纳米复合材料梁的固有频率。而屈曲发生后,现象正好相反。

参考文献:

- [1] SASHA S, DIKIN D A, DOMMETT G H B, et al. Graphene-based composite materials [J]. *Nature*, 1990, 442(2): 282–283.
- [2] RAHMAN R, HAQUE A. Molecular modeling of crosslinked graphene-epoxy nanocomposites for characterization of elastic constants and interfacial properties [J]. *Composites Part B: Engineering*, 2013, 54(9): 353–364.
- [3] JI X Y, CAO Y P, FENG X Q. Micromechanics prediction of the effective elastic moduli of graphene sheet-reinforced polymer nanocomposites [J]. *Modelling & Simulation in Materials Science & Engineering*, 2010, 18(4): 1–16.
- [4] KING J A, KLIMEK D R, MISKIOGLU I, et al. Mechanical properties of graphene nanoplatelet/epoxy composites [J]. *Journal of Applied Polymer Science*, 2013, 128(6): 4217–4223.
- [5] ZHAO X, ZHANG Q, CHEN D, et al. Enhanced mechanical properties of graphene-based poly (vinyl alcohol) composites [J]. *Macromolecules*, 2010, 43(5): 2357–2363.
- [6] RAFIEE M, RAFIEE J, YU Z Z, et al. Buckling resistant graphene nanocomposites [J]. *Applied Physics Letters*, 2009, 95(22): 10–18.
- [7] NGUYEN T K, VO T P, THAI H T. Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory [J]. *Composites Part B: Engineering*, 2013, 55(55): 147–157.
- [8] PARASHAR A, MERTINY P. Representative volume element to estimate buckling behavior of graphene/polymer nanocomposite [J]. *Nanoscale Research Letters*, 2012, 7(1): 515–518.
- [9] FENG C, KITIPORNCHAI S, YANG J. Nonlinear bending of polymer nanocomposite beams reinforced with non-uniformly distributed graphene platelets (GPLs) [J]. *Composites Part B: Engineering*, 2017, 110(1): 132–140.
- [10] YANG J, WU H, KITIPORNCHAI S. Buckling and postbuckling of functionally graded multilayer graphene platelet-reinforced composite beams [J]. *Composite Structures*, 2017, 161(1): 111–118.
- [11] LIAN G, TUAN C C, LI L, et al. Vertically aligned and interconnected graphene networks for high thermal conductivity of epoxy composites with ultralow loading [J]. *Chemistry of Materials*, 2016, 28(17): 6096–6104.
- [12] WU S, LADANI R B, JIN Z, et al. Aligning multilayer graphene flakes with an external electric field to improve multifunctional properties of epoxy nanocomposites [J]. *Carbon*, 2015, 94(1): 607–618.
- [13] ZHANG Y F, HAN D, ZHAO Y H, et al. High-performance thermal interface materials consisting of vertically aligned graphene film and polymer [J]. *Carbon*, 2016, 109(1): 552–557.
- [14] 韩依廷. 定向排列石墨烯/聚合物复合材料研究进展 [J]. *石化技术*, 2017, 24(12): 207–208.
HAN Y T. Research progress of directional arrangement of graphene/polymer composites [J]. *Petrochemical Industry Technology*, 2017, 24(12): 207–208.
- [15] AFFDL J C H, KARDOS J L. The Halpin-Tsai equations: a review [J]. *Polymer Engineering & Science*, 1976, 16(5): 344–352.
- [16] WANG F, LIAO X, XIONG X. Characteristics of the differential quadrature method and its improvement [J]. *Mathematical*

- Problems in Engineering, 2015(6): 1–9.
- [17] CHOUDHURY A. Preparation and characterization of nanocomposites of poly-p-phenylene benzobisthiazole with graphene nanosheets [J]. *Rsc Advances*, 2014, 4(17): 8865–8870.
- [18] VAN ES M. Polymer-clay nanocomposites: the importance of particle dimensions [D]. Delft, Netherlands: Delft University of Technology, 2001: 18–37.
- [19] BERT C W. Differential quadrature and its application in engineering, by Chang Shu, Springer, London, 2000 [J]. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2010, 11(14): 1398–1399.
- [20] LIU X, METCALF T H, ROBINSON J T, et al. Shear modulus of monolayer graphene prepared by chemical vapor deposition [J]. *Nano Letters*, 2012, 12(2): 1013–1017.
- [21] YASMIN A, DANIEL I M. Mechanical and thermal properties of graphite platelet/epoxy composites [J]. *Polymer*, 2004, 45(24): 8211–8219.
- [22] RAFIEE M A, JAVAD R, ZHOU W, et al. Enhanced mechanical properties of nanocomposites at low graphene content [J]. *Acs Nano*, 2009, 3(12): 3884–3890.
- [23] XIAO L, METCALF T H, ROBINSON J T, et al. Internal friction and shear modulus of graphene films [J]. *Solid State Phenomena*, 2012, 184(1): 319–324.
- [24] LIANG J, YI H, LONG Z, et al. Molecular-level dispersion of graphene into poly (vinyl alcohol) and effective reinforcement of their nanocomposites [J]. *Advanced Functional Materials*, 2010, 19(14): 2297–2302.

Free Vibrations of Pre/Post-Buckled Graphene-Reinforced Epoxy Resin Matrix Nanocomposite Beams

ZHANG Hui, SONG Mitao

(*Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China*)

Abstract: Free vibration of pre/post-buckled graphene-reinforced nanocomposite beams was analyzed by the differential quadrature method. Considering the random distribution and directional arrangement of graphene nanoplatelets in the matrix, Young's moduli of graphene nanocomposites in two modes were estimated by Halpin-Tsai micromechanical model. The first-order shear deformation theory was used to establish the governing equations of beams by Hamilton principle. The critical buckling loads of the graphene-reinforced nanocomposite beam and the natural frequencies in the pre/post-buckling regimes were calculated by the differential quadrature method. Numerical results show that dispersing more graphene platelets with less single layers and arranging them in a reasonable mode will greatly increase the critical buckling loads of the beams and the natural frequencies in pre-buckling regime. However, the same approach reduces the stiffnesses of the beams in the post-buckling regime.

Keywords: graphene; distribution mode; differential quadrature method; buckling; natural frequency