

相场断裂方法发展概况

张 豪, 于继东, 裴晓阳, 彭 辉, 李 平, 蔡灵仓, 汤铁钢

(中国工程物理研究院流体物理研究所, 四川 绵阳 621999)

摘要: 相场断裂方法自21世纪初开始发展以来, 一直备受关注, 在裂纹扩展模拟方面表现出了一定的特点, 取得了一定的研究成果。本文分析了相场断裂方法较其他断裂模拟方法的优势, 简单介绍了相场断裂方法的发展现状和发展趋势: 目前脆性断裂相场方法已较为成熟, 能够模拟诸多脆性断裂中的经典问题, 在此基础上正在朝着解决多场耦合情况下的断裂问题发展, 且也取得了一定的研究成果。最后, 简单介绍了延性断裂相场方法的发展现状, 提出在该方向进行深度研究的展望。

关键词: 相场断裂方法; 数值模拟; 脆性断裂; 延性断裂

中图分类号: O347.3

文献标识码: A

材料的动态断裂及损伤至今仍是一个世界性的难题, 如钱学森先生所说: (这是一个)“连基本概念还不十分清楚的问题”^[1]。这是由于在实验方面, 材料的动态断裂损伤研究涉及动态加载及原位诊断等多方面的技术, 但目前这些技术的发展在不同程度上受到了一定的限制, 尤其是材料在高速冲击状态下动态损伤断裂的原位诊断技术, 还很难获得材料内部裂纹扩展的清晰图像。在数值模拟方面, 损伤断裂同样是一个极具挑战的课题, 美国 Lawrence Livermore 国家实验室的报告提及: “从一定程度上讲, 我们对动态断裂过程的预测能力还远远不够, 而且显得很粗糙”^[2]。所以, 迫切需要寻找合适的断裂问题数值模拟方法。

相场断裂方法自21世纪初开始发展以来, 已经取得了一些研究成果。相场断裂方法通过一系列的微分方程描述断裂物理过程, 从而避免了繁琐的裂纹面追踪, 在模拟裂纹的起裂、传播、分叉等现象中表现出了一定特点。相场断裂方法已经成为研究断裂问题的重要方法之一。本文将对目前主要的断裂数值模拟方法, 指出相场断裂方法的特点, 并介绍其发展现状, 期望为材料动态断裂研究有所助益。

1 裂纹扩展数值模拟方法的比较

目前对于裂纹扩展问题的数值模拟方法, 主要可以分为两类: 一类是裂纹基于网格扩展的几何描述方法, 如单元删除法(单元失效法)、界面单元法等, 这类方法中裂纹只能在网格上或者网格边界上扩展; 另一类是非几何描述方法, 如扩展有限元法(XFEM)和相场(Phase-Field Methods)断裂方法等, 该类方法中裂纹可以脱离网格, 在网格内部扩展。单元删除法是较简单的一种断裂处理方式, 只需当单元的某物理量达到断裂判据时使其应力为零^[3], 或在总体质量阵中移除断裂单元的质量^[4]。界面单元法则在单元与单元间的界面处插入界面单元, 界面单元节点间具有内聚力, 当达到断裂判据时, 界面单

* 收稿日期: 2019-05-15; 修回日期: 2019-05-22

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(11772067); 国家自然科学基金青年科学基金(11702277); 国家自然科学基金重点项目(11532012)

作者简介: 张 豪(1988—), 男, 博士研究生, 助理研究员, 主要从事高压物理与力学研究。

E-mail: zhanghao17@gascaep.ac.cn

通信作者: 蔡灵仓(1964—), 男, 博士生导师, 研究员, 主要从事凝聚态物理研究。

E-mail: cai_lingcang@aliyun.com

元失效而断开,主要有 Xu 等^[5]和 Camacho 等^[6]几种表述方式。扩展有限元是由 Belytschko 等^[7]和 Moës 等^[8]提出的,其核心思想是通过扩充形函数把计算域的位移场所具有的某种特性添加到变分函数空间和试函数空间中,断裂的间断性被扩充形函数隐式地包含,从而间断本身与网格无关,裂纹可在网格内扩展^[9]。相场方法的核心思想是利用弥散的相边界描述实际上较为尖锐的边界,通过引入序参量,便可用连续函数描述断裂模型,并通过相场控制方程控制序参量的演化,使得在模拟时不用显式地追踪裂纹面,而是通过序参量的自动演化获取裂纹路径及位置^[10]。

Song 等^[11]详细对比了单元删除法、界面单元法和扩展有限元法对于动态裂纹扩展的优劣,本文结合 Borden 等^[12]的动态裂纹扩展相场方法进行对比分析。模拟结果分别与预置裂纹玻璃片 I 型拉伸裂纹的分叉现象^[13]和 KW 试验(Kalthoff-Winkler Test)冲击加载裂纹以 70°角方向扩展现象(材料为马钉钢 Maraging steel 18Ni1900)^[14]的实验结果做对比,对比结果见表 1。从表 1 中可以看出,单元删除法和界面单元法在不同的网格划分(结构网格和非结构网格)下,对同一算例的模拟结果有较大的差别,表明初始网格划分决定着裂纹扩展路径,这种情况下即使网格细分,也不能得到收敛结果;其次,采用三角形网格等非结构网格时,模拟出来的裂纹崎岖不平,必定造成比实际更大的裂纹表面能耗散, Bourdin 等^[15]、Giacomini 等^[16]也给出了相同的论断。这也是此类方法被称为几何描述的原因。表 1 中非几何描述方法(XFEM 和相场断裂方法)可以得出较为准确的动态裂纹扩展模拟结果,如相场方法,当网格尺寸减小到一定程度,即使再减小网格尺寸,模拟结果也不会有太大的变化,表明了相场方法的网格收敛性。

XFEM 和相场断裂方法的比较体现在对复杂裂纹系统的模拟上,主要视方法的裂纹面追踪技术。XFEM 属于间断界面处理方法,需要通过特殊的裂纹追踪技术(如水平集法 Level Sets^[17]、快速推进法 Fast Marching^[18])来追踪裂纹面,这些方法在处理三维以及多裂纹问题上显得尤为繁琐,目前大多处理一些单裂纹面的简单三维问题及较简单的多裂纹问题(见表 2)。而相场方法属于弥散界面处理方法,计算过程无需显式追踪裂纹面,而是通过序参量的演化自动获得,因此无需对三维及多裂纹问题做特殊处理,所以没有专门针对这方面的文献。Miehe 等^[19]在考虑热诱导的裂纹扩展问题时给出了较为复杂的三维裂纹扩展模拟结果,此外,在其模拟多相物质裂纹萌生发展过程的结果中可以观察到较为复杂的多裂纹相互作用问题(见表 2),都表明相场方法在处理复杂裂纹问题时的能力。

综上所述,相场断裂方法不仅可以给出较为准确的动态裂纹扩展模拟结果,而且相较于其他方法,在复杂裂纹问题方面表现出了一定的特点。因此,相场断裂方法是动态裂纹扩展模拟的一种重要手段。

2 相场断裂方法发展现状

2.1 相场断裂方法分类及物理领域相场断裂方法简介

相场断裂方法的研究路线可分为物理领域和力学领域,二者的理论和技术背景有较大差别。物理领域基于 Ginzburg-Landau 理论,代表模型如 Hakim 和 Karma 提出的模型^[20],所给出的断裂系统自由能为

$$F(\mathbf{u}, s) = \int_{\Omega} \left\{ g(\phi) [\psi_0(\varepsilon(\mathbf{u})) - \psi_c] + V(\phi) + \frac{1}{2} D_\phi |\nabla \phi|^2 \right\} d\mathbf{x} \quad (1)$$

式中: ϕ 为序参量; $g(\phi)$ 为插值函数,文中 $g(\phi) = \phi^{2+\alpha}$, 当 ϕ 趋近于零时, α 取正值保证应力完全释放; ψ_0 为应变能密度; ψ_c 为临界应变能密度,当应变能密度超过 ψ_c 时,裂纹开始起裂扩展; $V(\phi) = \phi^2(1-\phi^2)/4$, 是典型的双势阱函数,势阱位置为 0 和 1。(1)式中前两项称为体自由能项,第一项类似相场方法中的熔化温度项,通过其调整双势阱函数的稳态与亚稳态;最后一项为表面项。该模型完全可与相场方法最初的应用——熔化固化相变的相场方法类比,体现的是相场方法的思想,但自由能中各项的物理意义并不清晰。Pons 和 Karma^[21]于 2010 年成功模拟了 I、III 型混合模式产生的锯齿状裂纹,如图 1 所示,标志着物理领域相场断裂模型的成功。

力学领域基于 Francfort 和 Marigo^[22]提出的断裂变分原理

表 1 裂纹扩展的数值模拟方法对比
Table 1 Comparison of methods in fracture propagation simulation

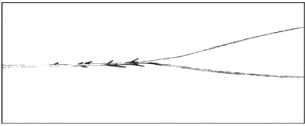
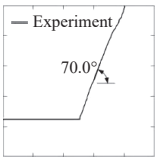
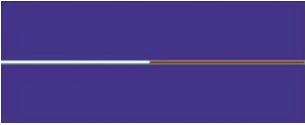
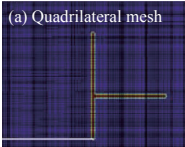
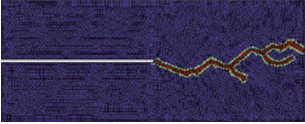
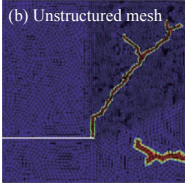
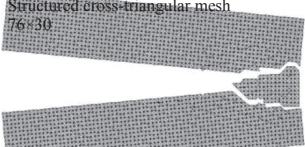
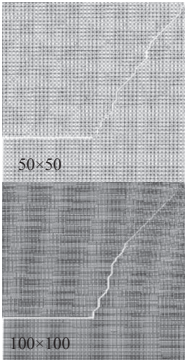
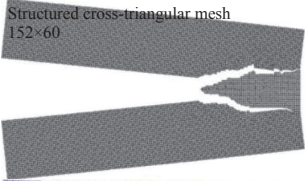
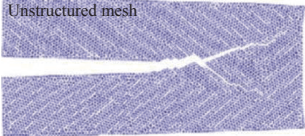
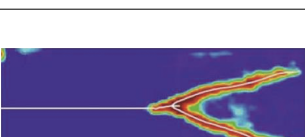
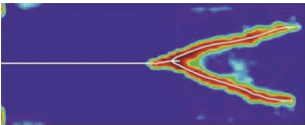
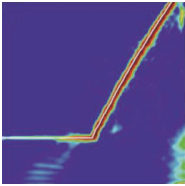
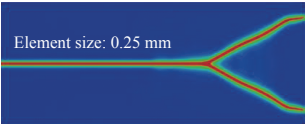
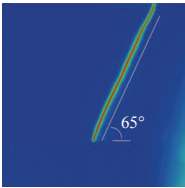
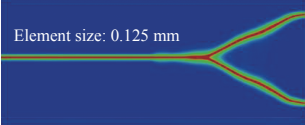
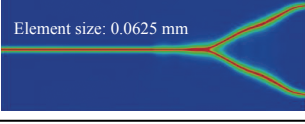
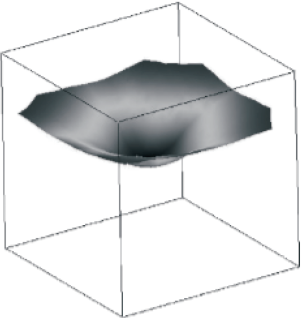
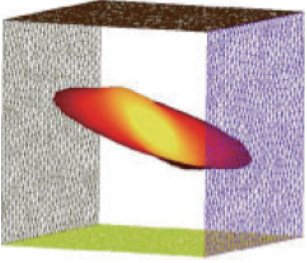
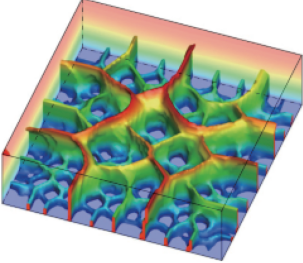
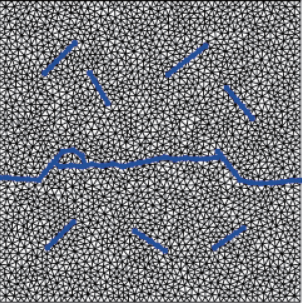
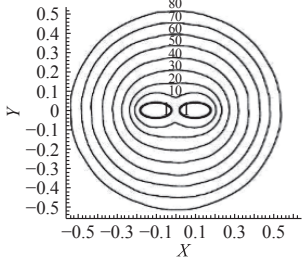
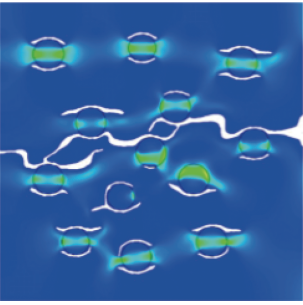
Methods	Type I tensile fracture	KW test
Experimental result		
Element deletion	Quadrilateral mesh 	(a) Quadrilateral mesh 
	Unstructured mesh 	(b) Unstructured mesh 
Inter element	Structured cross-triangular mesh 76×30 	
	Structured cross-triangular mesh 152×60 	
	Unstructured mesh 	
		
XFEM		
Phase field	Element size: 0.25 mm 	
	Element size: 0.125 mm 	
	Element size: 0.0625 mm 	

表 2 扩展有限元及相场方法处理三维及多裂纹的对比

Table 2 Comparison of 3D and multi-fracture simulation of XFEM and phase field approach

Crack	XFEM		Phase field
	Level sets	Fast marching	No need crack tracking
3D crack			
Multi-crack			

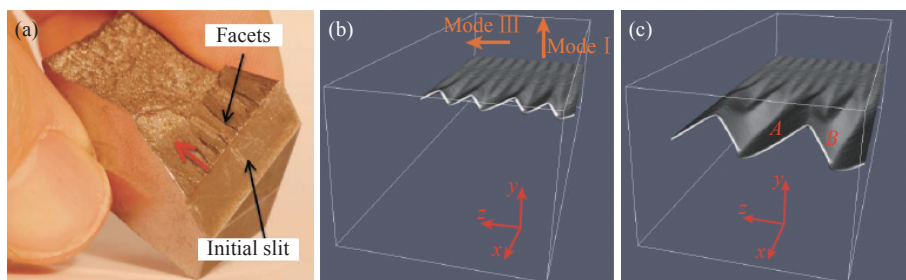


图 1 I、III 型混合模式下锯齿状裂纹的实验结果(a)和相场模拟结果(b)(c)^[21]

Fig. 1 Experimental result (a) and phase field simulation (b), (c) of jag fracture under mixed condition of type I & III^[21]

$$E(u, \Gamma) = \int_{\Omega} \psi_{\epsilon}(\epsilon(u)) dx + G_c \int_{\Gamma} ds \quad (2)$$

式中: G_c 为临界能量释放率, ψ_{ϵ} 为弹性能密度, Γ 为裂纹表面, Ω 为求解区域。等号右边第一项为弹性应变能, 第二项为断裂表面能, 变分原理认为裂纹的扩展都应使自由能取极小值并遵循不可逆条件。该原理从传统的 Griffith 理论发展而来, 表达式及各参数都有各自的物理意义, 是对传统断裂理论的继承和发展。

由以上对比可以看出, 物理领域和力学领域最大的区别在于其源于不同的理论基础。由于力学领域相场断裂模型与传统断裂理论的紧密联系, 接下来仅介绍力学领域相场断裂方法, 物理领域相场断裂方法可参见 Spatschek 等^[23]的综述。

2.2 脆性断裂相场方法

1920 年, Griffith^[24]突破强度理论范畴, 提出了基于能量的断裂理论——Griffith 能量理论。但 Griffith 理论最大的缺点是只能应用于简单构型, 难以对复杂构型中的裂纹问题进行求解分析。1998 年, Francfort 和 Marigo^[22]基于 Griffith 能量理论提出了断裂变分模型, 克服了上述问题, 可表述为

(2) 式。断裂问题系统自由能由弹性应变能和断裂表面能构成, 裂纹的扩展受自由能最小化原理控制。但在裂纹边界待求的情况下 (并不事先知道裂纹边界), 表面能中的边界积分不易处理, 于是 Bourdin 和 Francfort 等^[15] 于 2000 年结合相场理论, 通过引入序参量, 给出了断裂面的弥散表达式

$$\Gamma \approx \int_{\Omega} \left[\frac{1}{4\ell} (1-s)^2 + \ell |\nabla s|^2 \right] d\mathbf{x} \quad (3)$$

式中: 被积函数称为面积密度; $s \in [0, 1]$ 称为序参量, 这里 1 表示材料完好, 0 表示完全断裂 (有些文献相反)。断裂面的弥散宽度 ($0 < s < 1$ 的区域) 受 ℓ (具有长度量纲) 控制: ℓ 越大, 裂纹弥散宽度越宽; ℓ 越小, 裂纹弥散宽度越窄; 当 $\ell \rightarrow 0$ 时, 裂纹弥散宽度趋于零, (3) 式中约等号可取等号, 表明 (3) 式趋于真实裂纹面积, 称为 Γ -convergence。代入 (2) 式, 可得自由能

$$E_{\ell}(\mathbf{u}, s) = \int_{\Omega} \psi_{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}, s) d\mathbf{x} + G_c \int_{\Omega} \left[\frac{1}{4\ell} (1-s)^2 + \ell |\nabla s|^2 \right] d\mathbf{x} \quad (4)$$

式中: $\psi_{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}, s) = g(s)\psi_{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon})$, 表示弹性能由应变 $\boldsymbol{\epsilon}$ 及序参量 s 共同确定; $g(s)$ 为插值函数, 需保证 $\psi_{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}, 0) = 0$ 和 $\psi_{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}, 1) = \psi_{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon})$, 如 $g(s) = s^2 + \eta$, η 为一极小量, 用以避免发生数值奇异。(4) 式成功将裂纹面边界积分转变成体积分, 使数值求解变得容易, 所以 (4) 式也被称为“断裂变分原理的具体数值形式”。Francfort 和 Marigo 提出的断裂变分理论及 Bourdin 和 Francfort 给出的具体数值实现形式为相场断裂模型的发展奠定了坚实的理论基础, 为断裂的模拟提供了新的解决途径, 他们在 2008 年出版了断裂变分理论的专著^[25], 体现了该理论重要的学术价值。

此外, 还需一些细节上的处理, Bourdin 的自由能描述的是一个拉压对称形式——弹性应变能对于应力和应变区分不了正负, 拉应力和压应力将产生相同的应变能来驱动裂纹, 从而在受压时产生不真实的裂纹。于是 Amor 等^[26] 和 Miehe 等^[27] 先后提出将弹性应变能进行拉压分解

$$\psi_{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}, s) = g(s)\psi_{\epsilon}^{+}(\boldsymbol{\epsilon}) + \psi_{\epsilon}^{-}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (5)$$

其中

$$\psi_{\epsilon}^{+}(\boldsymbol{\epsilon}) := \lambda \langle \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_2 + \boldsymbol{\epsilon}_3 \rangle_{+}^2 / 2 + \mu \left(\langle \boldsymbol{\epsilon}_1 \rangle_{+}^2 + \langle \boldsymbol{\epsilon}_2 \rangle_{+}^2 + \langle \boldsymbol{\epsilon}_3 \rangle_{+}^2 \right) \quad (6)$$

式中: $\boldsymbol{\epsilon}_1$ 、 $\boldsymbol{\epsilon}_2$ 、 $\boldsymbol{\epsilon}_3$ 为应力状态 $\boldsymbol{\epsilon}$ 的 3 个应力主值; λ 和 μ 为拉梅常数; 符号 $\langle a \rangle_{+} := \frac{1}{2}(a \pm |a|)$, 正号表示受拉, 负号表示受压。该分解只将拉伸情况下的应变能作为裂纹扩展驱动力, 避免受压时产生的不真实裂纹。此外, 还可得到引入序参量的弹性本构——应力释放模型

$$\boldsymbol{\sigma} = g(s) \frac{\partial \psi_{\epsilon}^{+}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial \psi_{\epsilon}^{-}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (7)$$

式中: 等号右侧第 1 项表示拉应力, 完全断裂时将释放为零; 第 2 项表示压应力, 断裂后不释放。在此基础上, (4) 式对序参量求变分 ($\delta E / \delta s = 0$) 便可得到静态/准静态的相场控制方程。Miehe 等^[27-28] 给出的控制方程应用较广, 其相场模型序参量 0 表示完好, 1 表示断裂, 序参量用 d 表示 (为保持符号与原文一致, 上下文符号略有不同), 断裂面弥散表达式与 (3) 式稍有不同, 为

$$\Gamma_1(d) = \int \frac{1}{2l} (d^2 + l^2 |\nabla d|^2) dV \quad (8)$$

式中: l 同 (3) 式的 ℓ 。插值函数为 $g(d) = (1-d)^2$ 时, 相场控制方程

$$\frac{g_c}{l} (d - l^2 \Delta d) - [2(1-d)\psi_{\epsilon}^{+}] = 0 \quad (9)$$

静态模型方面, Miehe 成功模拟了 I、II 型裂纹在不同加载强度下裂纹的扩展长度和发展方向, 结果如图 2(a) 所示。此外, 在准确性方面: Miehe 等^[27] 给出了带有预置裂纹的非对称三点弯曲裂纹扩展模拟与实验对比结果; Mesgarnejad 等^[29] 对脆性断裂模型通过多种实验分别进行了定性和定量的对比, 图 2(b) 为 L 形薄板弯曲时的裂纹扩展结果与实验的定性对比以及载荷-位移曲线的定量对比结果。

在静态脆性断裂相场模型的基础上, 各研究者提出了自己的动态模型, 如 Bourdin 和 Larsen^[30]、

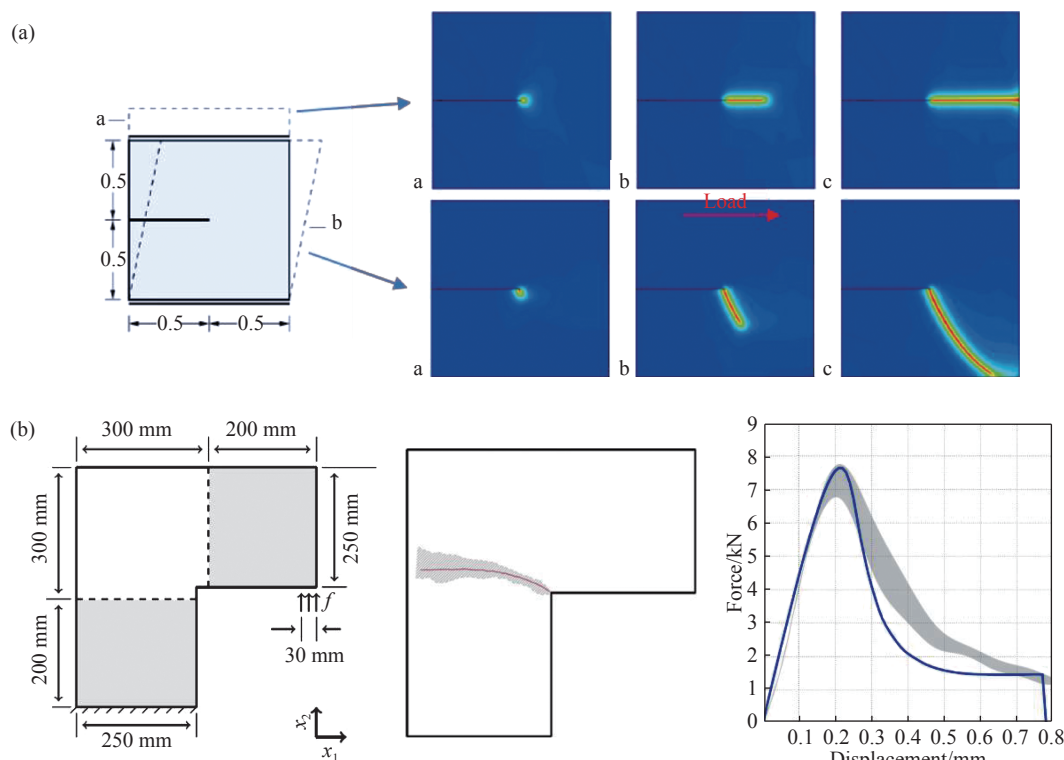


图 2 静态/准静态脆性断裂的相场模拟: (a) I、II 型裂纹^[27], (b) L 形薄板中的裂纹^[29]

Fig. 2 Phase field simulation of static/quasi-static brittle fracture: (a) type I & II fracture^[27], (b) fracture in L-shape sheet^[29]

Larsen 等^[31]、Borden 等^[12]、Hofacker 和 Miehe^[28, 32–33]、Schlüter 等^[34]。获得动态裂纹控制方程最直接方法是利用相场方程 $\partial\phi/\partial t = -M(\delta F/\delta\phi)$ 对自由能求变分, 此外, 还需添加不可逆条件, 防止卸载后弹性性能释放导致裂纹愈合。Miehe 等^[28] 提出了一种对裂纹愈合非常简洁而有效的解决办法, 引入一历史场变量

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) := \max_{\tau \in [0, t]} \psi_e^+(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (10)$$

其表示裂纹驱动力取历史最大拉伸弹性能。用 $\mathcal{H}$ 替换弹性能 ψ_e^+ , 即表示在卸载后, 驱动力仍维持在从加载到当前时刻的最大值, 从而防止裂纹愈合。Miehe 基于此给出了动态裂纹扩展的相场控制方程

$$\eta \dot{d} = 2(1-d)\mathcal{H} - \frac{g_c}{l} (d - l^2 \Delta d) \quad (11)$$

式中: η 为黏性系数, 与相场公式动力学系数关系为 $\eta = 1/M$ 。

动态裂纹扩展方面, 研究者们也给出了丰富的模拟结果。Bourdin 等^[30] 模拟了相同加载大小、不同加载速率下不同的裂纹扩展形式: 加载速率越大, 裂纹扩展形式越复杂, 高加载速率下会出现分叉, 并且分叉数量随着加载速率的增大而增大。Borden 等^[12] 模拟了 I 型动态拉伸裂纹的分叉现象和 KW 试验在较低加载速率下产生的 70° 角裂纹扩展形式两种经典动态裂纹扩展问题, 模拟结果与实验结果相吻合, 同时模拟所得裂纹传播速度上限为 0.6 倍 Rayleigh 声速, 与理论值相符, 如图 3(a)、图 3(b) 所示。KW 试验是目前检验裂纹扩展模拟准确性的一个标准, 几乎所有动态相场断裂方法的文献都以此验证其方法的准确性。Hofacker 等^[32] 给出了几种三维形式的 KW 试验模拟结果, 如图 3(c) 所示, 展示了相场断裂方法对三维情况的模拟能力, 值得注意的是, 真实 KW 试验并没有三维结果, 这种模拟结果仅是相场断裂方法三维模拟能力的展示。

2.3 脆性断裂相场模型在多场问题中的拓展应用

目前, 相场断裂的发展方向在于解决多场问题。相场断裂方法的基本框架如图 4 所示。从中可以看出, 相场断裂方法由力学平衡方程和相场控制方程构成, 基于该框架, 两组方程可分别解耦求解, 再

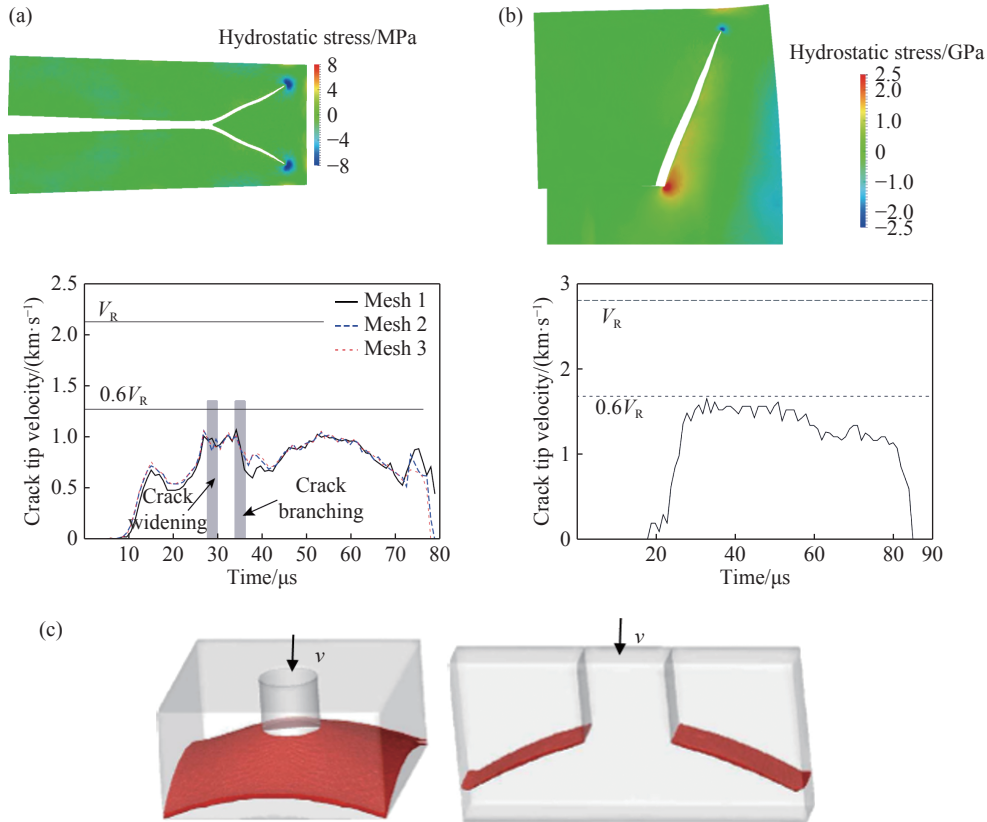


图 3 动态脆性断裂的相场模拟: (a)(b)动态裂纹经典问题^[12], (c)三维形式的 KW 试验模拟结果^[32]

Fig. 3 Phase field simulation of dynamic brittle fracture: (a), (b) classical problems in dynamic fracture^[12]; (c) 3D KW test^[32]

通过驱动力模型和应力释放本构进行耦合。Miehe 等^[19, 35–36]相继发表了 3 篇论文用相场断裂方法解决多场耦合问题。首先, 其对脆性断裂相场方法进行了总结, 给出了如下脆性断裂相场方程

$$\dot{d} = M \left[(1-d) \tilde{H} - (d - \ell^2 \Delta d) \right] \quad (12)$$

$$\tilde{H}(X, t) = \max_{s \in (0, t)} \tilde{D}(\text{state}(X, s)) \quad (13)$$

$$\tilde{D} = \frac{2\psi_e^+}{g_c/l} \quad (14)$$

$$\nabla \sigma + b = \rho \ddot{u} \quad (15)$$

$$\sigma = (1-d)^2 \frac{\partial \psi_e^+}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \psi_e^-}{\partial \varepsilon} \quad (16)$$

$$\psi_e^\pm(\varepsilon) := \lambda \langle \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \rangle_\pm^2 / 2 + \mu \left(\langle \varepsilon_1 \rangle_\pm^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_\pm^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_\pm^2 \right) \quad (17)$$

其中(12)式为相场控制方程, (15)式为力学方程。力学对相场的影响通过驱动力模型((14)式)体现, 而相场对力学的影响通过考虑应力释放本构((16)式)体现。而对于不同的多场问题, 只需引入相应的场方程(如电场、温度场等)并补充如(14)式和(16)式的耦合关系式即可。

多场问题的关键是建立正确的自由能系统, 相场断裂方法的自由能密度可作如下表述

$$\psi = \psi_{\text{els}} + \psi_{\text{plas}} + \psi_{\text{therm}} + \dots + \psi_{\text{frac}} = (\psi_e^- + \psi_{p0} + \psi_{\theta 0} + \dots) + g(d) \langle \psi_e^+ + \psi_p + \psi_\theta + \dots \rangle + \frac{G_c}{2l_0} (d^2 + l_0^2 |\nabla d|^2) \quad (18)$$

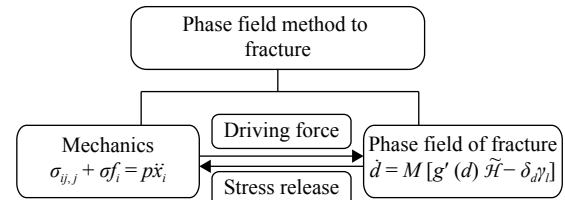


图 4 相场断裂方法的基本框架

Fig. 4 Framework of phase field approach to fracture

式中: ψ_{els} 、 ψ_{plas} 、 ψ_{therm} 、 ψ_{frac} 分别表示弹性能、塑性能、热能和断裂表面能, 省略号表示可以添加或去掉任意形式影响裂纹扩展的能量, 如脆性断裂, 只需考虑弹性能和断裂表面能。然后需对各能量进行合理的分解: 一部分不驱动裂纹扩展((18)式不带插值函数项), 存储在物质内部或以其他形式耗散; 一部分因断裂而释放, 是裂纹扩展驱动力(带插值函数项)。如弹性能 ψ_{els} 分解成压缩状态弹性能 ψ_{e}^- 和拉伸状态弹性能 ψ_{e}^+ , 只有 ψ_{e}^+ 驱动裂纹扩展, 而 ψ_{e}^- 仍存储在物质内部。

以上讨论给出了相场断裂方法解决多场问题的途径, 目前也取得了一定的成果, 比如压电材料中裂纹传播时的电场分布^[37](见图5)、铁电材料中裂纹传播的电畴分布(极化矢量)^[38](见图6)、考虑塑性大变形橡胶聚合物^[39]、玻璃聚合物^[36]中的裂纹扩展。此外, 还可模拟考虑温度场的热致裂纹扩展(表2)^[19], 考虑断裂后流体进入裂缝的水力压裂等。值得一提的是, 近年来, 水力压裂相场方法的研究非常火热, 如 Miehe 等^[35]、Ziaei-Rad 等^[40]、Santillán 等^[41], 列举一二。Santillán 等模拟了大坝(Koyna Dam)在水压下裂纹的扩展问题(见图7), 并称其相场断裂方法已开始解决实际工程问题。

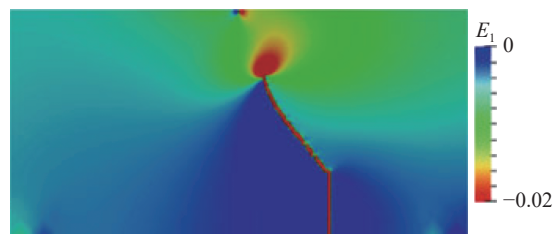


图5 带裂纹的电场分布^[37]

Fig. 5 Electronic field with fracture^[37]

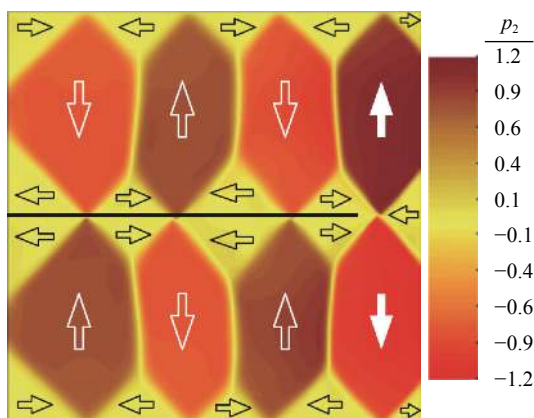


图6 带裂纹场的极化矢量场^[38]

Fig. 6 Polarization field with fracture^[38]

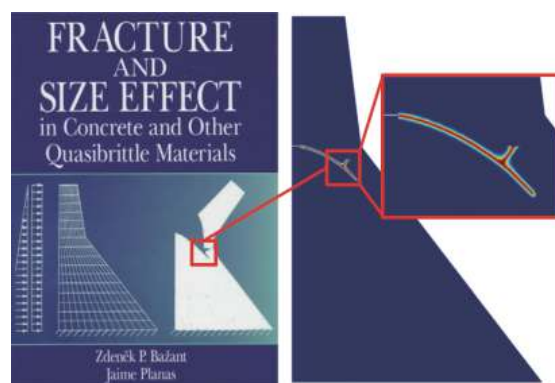


图7 水坝(Koyna dam)的水力压裂^[41]

Fig. 7 Phase field simulation of hydraulic fracture in Koyna dam^[41]

2.4 延性断裂相场方法

在高速冲击领域, 高速冲击状态下的断裂问题多涉及延性断裂, 所以本文关注相场断裂方法在延性断裂的发展。目前延性断裂相场模型研究相对较为匮乏, 少数几位研究者进行了初步尝试。

可将目前已有的延性断裂相场模型分为两类, 一类从插值函数入手。2015年, Duda 等^[42]给出了一种考虑塑性变形的脆性断裂模型, 将塑性能引入自由能方程中, 自由能表达式如下

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \tilde{w}^p, d, \nabla d) = g(d) W_{\text{elas}}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + W_{\text{plas}}(\tilde{w}^p) + W_{\text{frac}}(d, \nabla d) \quad (19)$$

式中: W_{elas} 、 W_{plas} 和 W_{frac} 分别表示弹性能、塑性能和断裂表面能。注意其插值函数 $g(d)$ 只作用于弹性能, 表明只有弹性能驱动裂纹扩展, 而塑性能作为耗散项不驱动裂纹扩展。对(19)式求变分后会发现相场控制方程和脆性断裂相同, 所以该模型只能称为考虑塑性变形的脆性断裂模型。其后, Ambati 等^[43]在 Duda 模型的基础上, 在插值函数中引入了“等效塑性变形参数”来考虑塑性应变的累积和局部效应。该模型将脆性断裂插值函数 $g(s) = s^2 + \eta$ 修改为 $g(s) = s^{2p} + \eta$, 式中等效塑性变形参数 p 表示为 $p = \varepsilon_{\text{eq}}^p / \varepsilon_{\text{eq, crit}}^p$, 从而实现了延性断裂的相场模拟。随后, Ambati 等^[44]将该模型扩展至三维, 并通过大量与实验对比的模拟结果来验证其模型的准确性。他们模拟了 I 型、材料为钢的平板在拉伸时随边界位移载荷增大发

生的弹性-塑性变形、紧缩变形、断裂的整个过程,如图8所示,同时还给出了大量与实验结果对比的力-位移曲线,定量表征其模拟的准确性。但 Ambati 的模型仅为静态模型,且等效塑性变形参数的引入较为经验,同时在用有限元求解时,对于 p 很大的高阶项,会引起较大的离散误差。

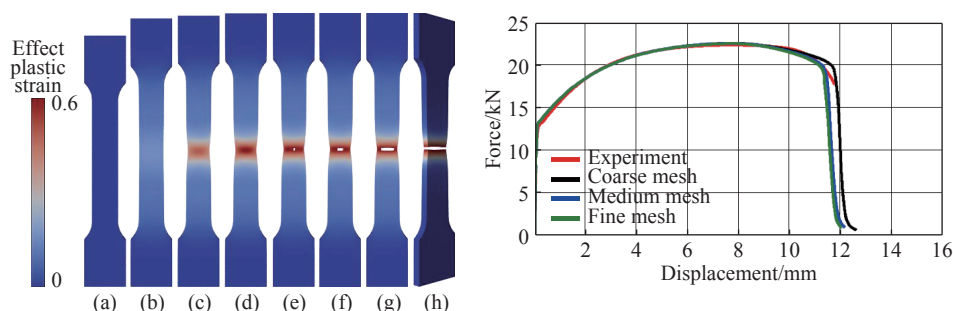


图8 Ambati 等延性断裂相场模拟结果^[44]

Fig. 8 Ductile fracture simulated by Ambati *et al.*^[44]

另一类则是从“断裂能级”的角度出发,认为延性断裂和脆性断裂所耗散的表面能具有较大差异,通过延性断裂和脆性断裂不同的临界能量释放率 G_c 来实现脆性断裂和延性断裂相互转变的延脆耦合模型。Miehe 等^[36]和 McAuliffe 等^[45]认为应变率主导断裂能级的转变,给出了随应变率变化的临界能量释放率(图9(a)),柳占立等^[46]则认为应力状态是决定断裂能级转变的主要因素,给出了随应力三轴度变化的临界能量释放率(图9(b))。上述研究者虽通过不同的参量影响临界能量释放率,但都成功模拟了 KW 试验在低加载速度下的脆性断裂和较高加载速度下产生的绝热剪切带断裂,如图10所示。

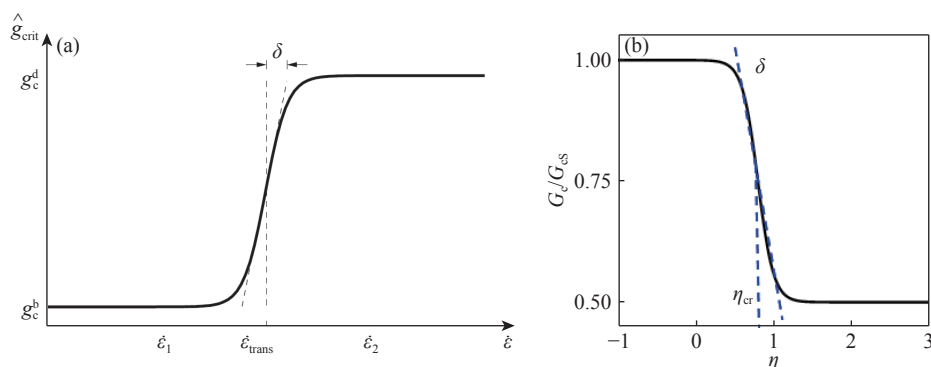


图9 脆性-延性断裂模型的能量释放率: (a)应变率决定的临界能量释放率转变^[36], (b)应力三轴度决定的临界能量释放率转变^[46]

Fig. 9 Energy release rate in fracture mode for brittle-ductile fracture transition: (a) strain rate induced energy release rate transition^[36], (b) stress triaxiality induced energy release rate transition^[46]

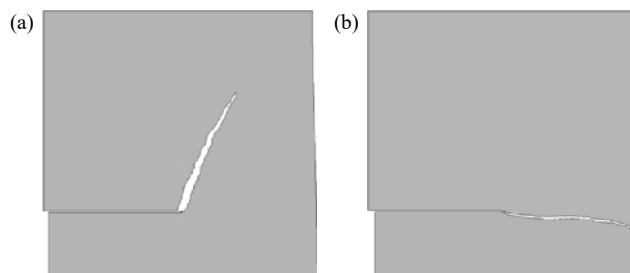


图10 KW 试验相场模拟结果^[36]: (a)冲击速度 20 m/s 产生的脆性断裂, (b)冲击速度 39 m/s 产生的绝热剪切失效

Fig. 10 Phase field simulation to KW test^[36]: (a) brittle fracture induced by impact velocity of 20 m/s, (b) ductile fracture induced by impact velocity of 39 m/s

该结果表明了相场断裂方法有模拟绝热剪切带等延性断裂模式的能力,此外,延脆耦合模型还表明相场断裂方法可用于考虑多断裂模式竞争的问题。

3 结 论

首先对比了不同裂纹扩展数值模拟方法,总结出相场断裂方法在断裂问题模拟中的特点:较几何描述方法有更为准确的裂纹扩展模拟能力;通过序参量的演化自动追踪裂纹面,不需要特殊的裂纹表面追踪技术,所以易于处理三维及多裂纹等复杂的裂纹扩展系统。其次,介绍了脆性断裂相场方法的发展现状,其核心主要有两点:利用序参量离散表达尖锐的裂纹面,从而使断裂变分问题在数学上易于求解(数学上连续);建立准确的断裂问题自由能系统是利用相场方法准确模拟裂纹扩展的关键。到目前为止,由于脆性断裂的能量体系较为简单,仅需考虑弹性能及断裂表面能,所以脆性断裂相场方法已发展得较为成熟,基本形成了固定的物理模型和求解方式,文献中也有诸多成功的模拟案例。随后分析了相场断裂方法的基本框架和自由能系统,指出了相场断裂方法处理多场耦合断裂问题的方法,这也是目前相场断裂方法的主要发展趋势。

最后,简单介绍了延性断裂相场方法的研究现状,目前该方向的研究文献相对较少,而这却是我们希望相场断裂方法有所发展的领域。希望相场断裂方法能用于模拟诸如金属壳体膨胀断裂等问题。金属壳体膨胀断裂的特点在于存在如层裂、绝热剪切及环向拉伸断裂等多种断裂模式的耦合竞争,以上断裂模式一般均为延性断裂。但要模拟壳体膨胀断裂问题,还有待延性断裂相场模型的进一步发展。不过目前的研究现状也为我们提供了一些线索,如 Miehe 等、McAuliffe 等和柳占立等建立的延脆转变模型,表明相场断裂方法有考虑多断裂模式竞争的能力,不同的断裂模式的差异由不同的断裂能级(不同能量释放率 G_c)体现。这些研究成果都表明,很有希望通过相场方法建立考虑壳体膨胀断裂问题中多断裂模式耦合竞争的断裂模型,从而实现该类问题的模拟。

参考文献:

- [1] 钱学森. 物理力学讲义 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2007.
- [2] BECKER R. How metals fail [R]. Metal Fracture-Lawrence Livermore Nation Laboratory, 2002: 13–30.
- [3] FAN R, FISH J. The *rs*-method for material failure simulations [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, 73(11): 1607–1623.
- [4] HALLQUIST J O. LS-DYNA theoretical manual [M]. USA: Livermore Software Technology Corporation, 1998.
- [5] XU X P, NEEDLEMAN A. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1994, 42(9): 1397–1434.
- [6] CAMACHO G T, ORTIZ M. Computational modelling of impact damage in brittle materials [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, 33(20/21/22): 2899–2938.
- [7] BELYTSCHKO T, BLACK T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 45(5): 601–620.
- [8] MOËS N, DOLBOW J, BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46(1): 131–150.
- [9] 庄茁, 成斌斌. 发展基于 CB 壳单元的扩展有限元模拟三维任意扩展裂纹 [J]. *工程力学*, 2012, 29(6): 12–21.
ZHUANG Z, CHENG B B. Development of X-FEM on CB shell element for simulating 3D arbitrary crack growth [J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(6): 12–21.
- [10] PROVATAS N, ELDER K. Book-phase-field methods in materials science and engineering [M]. Wiley-VCH Press, 2010.
- [11] SONG J H, WANG H, BELYTSCHKO T. A comparative study on finite element methods for dynamic fracture [J]. *Computational Mechanics*, 2008, 42(2): 239–250.
- [12] BORDEN M J, VERHOUSEL C V, SCOTT M A, et al. A phase-field description of dynamic brittle fracture [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2012, 217(220): 77–95.

- [13] RAMULU M, KOBAYASHI A S. Mechanics of crack curving and branching-a dynamic fracture analysis [J]. *International Journal of Fracture*, 1985, 27(3/4): 187–201.
- [14] KALTHOFF J F, WINKLER S. In failure mode transition at high rates of shear loading [C]//*Impact Loading and Dynamic Behavior of Materials*. FRG, 1987: 185–195.
- [15] BOURDIN B, FRANCFORT G A, MARIGO J J. Numerical experiments in revisited brittle fracture [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000, 48(4): 797–826.
- [16] GIACOMINI A, PONSIGLIONE M. A Γ -convergence approach to stability of unilateral minimality properties in fracture mechanics and applications [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2006, 180(3): 399–447.
- [17] GRAVOUIL A, MOËS N, BELYTSCHKO T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part II: level set update [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53(11): 2569–2586.
- [18] SUKUMAR N, CHOPP D L, BÉCHET E, et al. Three-dimensional non-planar crack growth by a coupled extended finite element and fast marching method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, 76(5): 727–748.
- [19] MIEHE C, SCHÄNZEL L M, ULMER H. Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. Part I. balance of crack surface and failure criteria for brittle crack propagation in thermo-elastic solids [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, 294(1): 449–485.
- [20] HAKIM V, KARMA A. Laws of crack motion and phase-field models of fracture [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2009, 57(2): 342–368.
- [21] PONS A J, KARMA A. Helical crack-front instability in mixed-mode fracture [J]. *Nature*, 2010, 464(7285): 85–89.
- [22] FRANCFORT G A, MARIGO J J. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, 46(8): 1319–1342.
- [23] SPATSCHEK R, BRENER E, KARMA A. Phase field modeling of crack propagation [J]. *Philosophical Magazine*, 2011, 91(1): 75–95.
- [24] GRIFFITH A A. The phenomena of rupture and flow in solid [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1920, 221: 163–198.
- [25] Bourdin B, Francfort G A, Marigo J J. The variational approach to fracture[M]. Springer Science+Business Media B. V., 2008.
- [26] AMOR H, MARIGO J J, MAURINI C. Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact: numerical experiments [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2009, 57(8): 1209–1229.
- [27] MIEHE C, WELSCHINGER F, HOFACKER M. Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: variational principles and multi-field FE implementations [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 83(10): 1273–1311.
- [28] MIEHE C, HOFACKER M, WELSCHINGER F. A phase field model for rate-independent crack propagation: robust algorithmic implementation based on operator splits [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199: 2765–2778.
- [29] MESGARNEJAD A, BOURDIN B, KHONSARI M M. Validation simulations for the variational approach to fracture [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, 290(1): 420–437.
- [30] BOURDIN B, LARSEN C J, RICHARDSON C L. A time-discrete model for dynamic fracture based on crack regularization [J]. *International Journal of Fracture*, 2011, 168(2): 133–143.
- [31] LARSEN C J, ORTNER C, SÜLI E. Existence of solutions to a regularized model of dynamic fracture [J]. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2010, 20(7): 1021–1048.
- [32] HOFACKER M, MIEHE C. Continuum phase field modeling of dynamic fracture: variational principles and staggered FE implementation [J]. *International Journal of Fracture*, 2012, 178(1): 113–129.
- [33] HOFACKER M, MIEHE C. A phase field model of dynamic fracture: robust field updates for the analysis of complex crack patterns [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2013, 93(3): 276–301.
- [34] SCHLÜTER A, WILLENBÜCHER A, KUHN C, et al. Phase field approximation of dynamic brittle fracture [J]. *Computational Mechanics*, 2014, 54(5): 1141–1161.
- [35] MIEHE C, MAUTHE S. Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. Part III. crack driving forces in hydro-poro-elasticity and hydraulic fracturing of fluid-saturated porous media [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, 304(1): 619–655.

- [36] MIEHE C, HOFACKER M, SCHÄNZEL L M, et al. Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. Part II. coupled brittle-to-ductile failure criteria and crack propagation in thermo-elastic-plastic solids [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, 294(1): 486–522.
- [37] WILSON Z A, BORDEN M J, LANDIS C M. A phase-field model for fracture in piezoelectric ceramics [J]. *International Journal of Fracture*, 2013, 183(2): 135–153.
- [38] ABDOLLAHI A, ARIAS I. Phase-field modeling of fracture in ferroelectric materials [J]. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2015, 22(2): 153–181.
- [39] MIEHE C, SCHÄNZEL L M. Phase field modeling of fracture in rubbery polymers. Part I: finite elasticity coupled with brittle failure [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2014, 64: 93–113.
- [40] ZIAEI-RAD V, SHEN L, JIANG J, et al. Identifying the crack path for the phase field approach to fracture with non-maximum suppression [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, 312(1): 304–321.
- [41] SANTILLÁN D, MOSQUERA J C, CUETO-FELGUEROSO L. Phase-field model for brittle fracture. validation with experimental results and extension to dam engineering problems [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, 178: 109–125.
- [42] DUDA F P, CIARBONETTI A, SÁNCHEZ P J, et al. A phase-field/gradient damage model for brittle fracture in elastic-plastic solids [J]. *International Journal of Plasticity*, 2015, 65: 269–296.
- [43] AMBATI M, GERASIMOV T, LORENZIS L D. Phase-field modeling of ductile fracture [J]. *Computational Mechanics*, 2015, 55(5): 1017–1040.
- [44] AMBATI M, KRUSE R, LORENZIS L D. A phase-field model for ductile fracture at finite strains and its experimental verification [J]. *Computational Mechanics*, 2016, 57: 149–167.
- [45] MCAULIFFE C, WAISMAN H. A coupled phase field shear band model for ductile-brittle transition in notched plate impacts [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, 305: 173–195.
- [46] 柳占立, 李想, 初东阳, 等. 多物理场耦合断裂的相场方法模拟及工程应用 [C]//第十二届全国爆炸力学会议. 桐乡, 2018.

An Overview of Phase Field Approach to Fracture

ZHANG Hao, YU Jidong, PEI Xiaoyang, PENG Hui, LI Ping, CAI Lingcang, TANG Tiegang

(*Institute of Fluid Physics, CAEP, Mianyang 621999, China*)

Abstract: Phase field modeling to fracture has received much attention since the beginning of this century, which exhibits an advantage in fracture propagation simulation. In this work, we compare the phase field approach to fracture with other simulation methods, and show an overview and development of phase field approach to fracture. Up to now, the phase field method has been successfully applied to the brittle fracture and could simulate some classical crack problems. Based on this, the multi-fields problem coupled with the fracture is currently pursued. Furthermore, we introduce the study situation of the phase field simulation to the ductile fracture and put forward its development in the future.

Keywords: phase field approach to fracture; simulation; brittle fracture; ductile fracture