再议量子理论的表述形式与诠释

汪克林[1] 曹则贤[2,†]
（1 中国科学技术大学近代物理系 合肥 230026）
（2 中国科学院物理研究所 北京 100190）

2024－06－19收到
† email：zxcao@iphy.ac.cn
DOI：10.7693/wl20240705

Resolving some confusion over the representation and interpretation of quantum mechanics

WANG Ke-Lin[1] CAO Ze-Xian[2,†]
(1 Department of Modern Physics，University of Science and Technology of China，Hefei 230026，China)
(2 Institute of Physics，Chinese Academy of Sciences，Beijing 100190，China)

摘 要 量子力学建立至今已达百年，关于量子力学仍存留许多困惑与争议。我们注意到可能的原因是状态矢量表示理念的不一致，以及混淆了不同的波函数概率诠释。我们认识到，坚持把状态矢量表示为无量纲的对象，认清波函数的薛定谔、玻恩和狄拉克各自诠释的不同以及薛定谔、玻恩的概率诠释可以经由狄拉克完备性关系联系起来，认识到概率行为出现在无量纲的态矢/波函数与决定性的状态方程之外， 则可以消除不少关于量子力学的误解。

关键词 状态矢量，波函数，表示理论，概率诠释，完备性关系，存在性，实在性，测量

Abstract Quantum mechanics has been established for roughly one hundred years, yet there remain some confusion and debate. This embarrassing situation may lie in the nonuniformity of state vector representations, and in the confusing different probabilistic interpretations of the wave function. We realized that by insisting on representing the state vector, thus the wave function, as a dimensionless abstract object, bearing in mind the differences among the interpretations of Schrödinger, Born and Dirac over the wave function, in particular noticing the fact that the probabilistic interpretations of Schrödinger and Born are related by the Dirac's completeness relation, and that the probabilistic behavior arises beyond the dimensionless state vector/wave function and the deterministic dynamic equation, then the confusion and debate over quantum mechanics can be largely resolved.

Keywords state vector，wave function，representation theory，probabilistic interpretation，completeness relation，existence，reality，measurement

1 导言

量子物理的诞生揭开了近代物理学发展的新篇章。自1924年玻恩在文章中造了量子力学(quantenmechanik)一词[1]，到1930年狄拉克出版了《量子力学原理》[2，3]，冯·诺伊曼1932年出版了《量子力学数学基础》[4]，量子力学的大致框架得以建立。根据量子力学理论，对物理体系的描述包括物理量算符以及量子态矢两个要素，此可同数学中的线性算子结合矢量空间的理论框架

相类比[3，4]。1939年，狄拉克又为量子状态矢量引入了bra-ket的简化标记，即符号〈 |和| 〉，极大地简化了量子力学的计算[5]。狄拉克的量子力学非常重视表示理论，《量子力学原理》第四版的前三章都是在介绍表示理论。至此，量子力学发展成了一个系统的也是具有一定数学严谨性的理论体系。量子力学理论至今已经走过整整一个世纪，期间出版的量子理论著述汗牛充栋。这些论著除了包含作者们各自的观点以外，其表述大体上都没有脱离狄拉克的《量子力学原理》和冯·诺伊曼的《量子力学数学基础》所设定的框架。

量子物理的进展给物理学各领域带来了显著且深刻的进步。与此同时，“量子理论是否是一个完善的理论体系”的争论却一直持续不断。持负面观点的代表人物是爱因斯坦，主要论点见于1935年以EPR悖论而闻名的三人合作论文[6]。此派观点认为量子理论中包含不确定性不符合决定论的精神，其关于物理实在的描述是不完全的。有趣的是，玻尔同年发表了同名论文，认为量子力学满足完备性的所有理性要求 (seem to fulfill all rational demands of completeness)[7]。这也是所谓的爱因斯坦—玻尔论争的片段之一，这个所谓的世纪之争包含诸多似是而非的内容[8—11]。

量子力学中的动力学方程是决定论的，满足因果律，但这并不能消除爱因斯坦等人的质疑。他们质疑的是状态表述与诠释中所隐含的不确定性。既然按照决定论的思想微观客体在给定时刻的状态是确定的，那就不应含有概率特性，更不应该依赖于是否被观测。一句话，量子力学的概率来自哪里？另一方面，量子物理的实验结果确实具有概率的性质，或者说，概率论的语汇较好地表达了量子物理的实验结果。于是，就出现了另一种广泛流行的观点，认为根据已有的实验事实可认定爱因斯坦们关于量子力学之完备性的质疑是不成立的，所谓的量子理论的世纪之争应该算早已落下了帷幕。

笔者注意到，关于量子态矢的观念以及波函数的(概率)诠释等量子力学基本内容实际上还是存在一些含混之处。只有将这些内容澄清之后，一些争议性的内容才能得到更清晰的理解。

2　波函数的薛定谔诠释、玻恩诠释与狄拉克诠释

原子的发光机制被归结为电子的辐射跃迁，自然会认为发光强度与电子跃迁的概率成正比，于是概率顺理成章地就成了量子理论的本征语言。在1926年薛定谔的波动力学出现之后，关于薛定谔的波函数实际上存在多种诠释，后继文献引用时常常会混淆不同说法。这也是量子力学论述中存在一些为争论而来的争论的一个起因。

波函数的概率诠释有多种，包括薛定谔本人的、玻恩的、冯诺伊曼的以及Born—Wiener的。此处先澄清薛定谔本人的说法与玻恩诠释之间的不同。最重要的是，我们要指出这两者是经由狄拉克的完备性关系相联系的。这样，它支持了我们的量子力学态矢量必须是无量纲的观点[12]，而这恰是澄清一些量子力学争论的关键。

在薛定谔1926年构造波动力学的文章中[13]{接下来这一段中符号依照原文，略有些乱，请特别关注波函数复共轭的写法}，

$$\iiint \psi^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 1 \tag{1}$$

是作为哈密顿原理的辅助条件(normierende Nebenbedingung)给出的。薛定谔在论文第四部分指出，$\psi\bar{\psi}$是系统构型空间中的某种**权重函数**。系统同时处于所有运动学能想象的位置，但不是以同样的强度。ψ是构型空间而不是真实物理空间上的函数，这为日后将单粒子波函数扩展到多粒子情形且包含内禀自由度预留了空间。对于只有外部自由度的单粒子，$\psi^*\psi\mathrm{d}V$可理解为粒子之物理量，比如电荷，出现在体积元$\mathrm{d}V$中的部分——偶极矩就是这么计算的，且一直就是这么计算的。这样的解释与粒子的观念不符，于是又改而诠释为粒子出现在体积元$\mathrm{d}V$中的概率。将$\int\psi^*\psi\mathrm{d}V = 1$作概率诠释，$\psi^*\psi\mathrm{d}V$被诠释为体积元$\mathrm{d}V$中电子出现的概率，则波函数$\psi$必然是个物理量，后被玻恩称为概率密度幅(Wahrscheinlichkeitsdichteamplitude)，有量纲$\left[L^{-3/2}\right]$。相应地，$\psi^*\psi$被理解为概率密度，有量纲$\left[L^{-3}\right]$。这是薛定

谔本人对波函数，确切地说是对$\psi\bar{\psi}$的诠释。顺便说一句，狄拉克会指出ψ是变换函数[14]，其将物理系统从坐标算符是对角矩阵的表象变换到哈密顿量为对角矩阵的表象。我们觉得，这个关于波函数ψ的诠释也许更有物理意义，因为它是对波函数ψ自身而非$\psi\bar{\psi}$的诠释，可惜一般量子力学文献似乎忽略了这一点。

与此相对，所谓波函数的概率诠释被称作玻恩诠释，乃是源自1926年玻恩的一篇拿薛定谔波函数处理电子—原子碰撞问题的短文[15]。玻恩考察具有一定内部状态的原子，未扰动的本征函数为$\psi_1^0(q_k)$，$\psi_2^0(q_k)\cdots$，对直线运动电子的散射过程。散射后的电子—原子渐近波函数可以写成关于电子在特定方向上的平面波乘上原子未扰动波函数所构成的叠加态：

$$\psi_{n\tau}^{(1)}(x,y,z;q_k)=\sum_m\iint_{\alpha x+\beta y+\gamma z>0}\mathrm{d}\omega\times \Phi_{nm}(\alpha,\beta,\gamma)\sin k_{nm}(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)\,\psi_m^0(q_k)\ . \quad (2)$$

用粒子的观点考察这个波函数表示的意义，则只有一种诠释是可能的，即系数$\Phi_{nm}(\alpha,\beta,\gamma)$的平方确定了自$z$-方向而来的电子被抛到由$\alpha,\beta,\gamma$所表征的方向上的概率。这就是所谓的波函数的玻恩诠释。引申一下，若系统处于波函数ψ描述的叠加态：

$$\psi=\sum_i c_i\psi_i\ , \quad (3)$$

则系统处于本征状态ψ_i的概率为$c_i^{\,*}c_i$。注意，显然这里的$\Phi_{nm}(\alpha,\beta,\gamma)$或者$c_i$是无量纲的，其模平方被当作概率与经典概率观念是一致的，其也不对波函数的性质有任何限定。这也是后来冯·诺伊曼量子测量公设的数学基础[4, 16]。

我们看到，波函数的薛定谔诠释与玻恩诠释之间存在根本的不同。薛定谔的概率诠释的基础是$\int\psi^*\psi\mathrm{d}V=1$，将波函数$\psi$限定为模为1的复数，这是量子力学的强制性假设。玻恩的“电子的原子散射”情境下的概率诠释基于一组复数：

$$\sum_i\left|c_i\right|^2=1\ , \quad (4)$$

是在承认$\int\psi^*\psi\mathrm{d}V=1$的前提下经过线性空间完备性而来的推论。设若$\psi_i$，$i=1,2,\cdots$是一组完备正交基，$\psi=\sum_i c_i\psi_i$，则由波函数归一化要求必有结论$\sum_i\left|c_i\right|^2=1$。这样，可以赋予$\left|c_i\right|^2$**经典概率**的意义。我们认为这两种诠释恰恰可用来理解后来关于量子力学的争论。按照薛定谔的观点，状态的波函数本身就是概率性的存在；而在玻恩那里，概率性是当把状态分解成本征函数时，在冯·诺伊曼的测量理论那里这就是测量过程，概率才表现出来的。狄拉克在1927年也讨论过量子动力学的诠释问题[14]。狄拉克的结论是，可以假设一个系统的初始状态确切地决定系统接下来的状态。概率的观念并不进入力学过程的最终描述；只当一些带概率的信息塞到你手里时，才会得到带概率的结果(The notion of probabilities does not enter into the ultimate description of mechanical processes; only when one is given some information that involves a probability can one deduce results that involve probabilities)。EPR文章没有参考文献[6]，不知道他们当年是否注意到了狄拉克的这一观点。

广为流传的爱因斯坦的“上帝不掷骰子”的说法，是一个掐头去尾的引用。在1926年12月给玻恩的一封信中，爱因斯坦写道：“无论如何我坚信，他(上帝)不掷骰子。3n-维空间里的波，速度通过势能(比如橡胶带)操控… [Jedenfalls bin ich überzeugt, daß der nicht würfelt. Wellen im 3n-dimensionalen Raum, deren Geschwindigkeit durch potentielle Energie (z. B. Gummibänder) reguliert wird …]”。这后半句恐怕才是爱因斯坦具体质疑的地方，即薛定谔的“n-粒子的行为由一个3n-维构型空间里的波函数描述”的观点。波函数以薛定谔方程规定的方式演化(受势能操控)，波函数决定体系的概率性表现。爱因斯坦是一个典型的概率思考者(statistical thinker)，也许他质疑的是波函数的薛定谔诠释而非物理世界的概率表现。认识到这一点，有助于理解EPR一文中爱因斯坦的论点。

强调一下，薛定谔的诠释与玻恩的诠释可以通过狄拉克的完备性关系联系起来。一个抽象的

状态，当我们为它选定了一个表示者(representative，狄拉克用语)，便有了相应的波函数。比如为某个状态$|\psi\rangle$选定了表示者q，便有了对应$|\psi\rangle \to \psi_q$，这个波函数可以是薛定谔的波函数或者更复杂一点的狄拉克的旋量。薛定谔的波函数概率诠释要求波函数归一化。另一方面，结合状态空间(暂且假设是有限维的)的完备性关系：

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = \mathbf{1} \quad , \tag{5}$$

对于波函数的一般表示，借助

$$|\psi\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i||\psi\rangle = \sum_i c_i|i\rangle \quad , \tag{6}$$

在q表示中这就是$\psi_q = \sum_i c_i \psi_q^{(i)}$，则波函数的归一化要求表现为要求系数$c_i$满足$\sum_i c_i c_i^* = 1$。重申一下，这个玻恩的波函数概率诠释不牵扯量纲的问题。至此，我们协调了薛定谔概率诠释、玻恩概率诠释与狄拉克表示论之间的关系。这个认识可以消除一些量子力学讨论中由于混淆波函数的概率诠释所带来的困惑。

有必要指出，狄拉克引入的表示论自带一个关于量子力学的困惑或者模棱两可。对于有限维希尔伯特空间中的表示，完备性条件为$\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbf{1}$，可以将$|n\rangle$理解为无量纲的存在。对于连续变量的情形，狄拉克引入的完备性关系是：

$$\int |x\rangle\langle x| \mathrm{d}x = 1 \ . \tag{7}$$

对于某个量子状态$|\varphi\rangle$，展开有：

$$|\varphi\rangle = \int |x\rangle\langle x| \mathrm{d}x|\varphi\rangle = \int \varphi(x)\,|x\rangle \mathrm{d}x \quad , \tag{8}$$

其中$\varphi(x) = \langle x|\varphi\rangle$称为状态$|\varphi\rangle$在$x$-表象中的波函数。此处潜藏的一个麻烦是$\int |x\rangle\langle x|\mathrm{d}x = 1$，$\varphi(x) = \langle x|\varphi\rangle$所引出的量纲问题。同样是表示状态的态矢，$|x\rangle$是有量纲的，而若以看待$|n\rangle$的观点把一般的状态矢量表示$|\varphi\rangle$看作是无量纲的，则带来了概念上的不一致。当同时考虑分立和连续情形时，完备性被狄拉克写成如下的形式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n\rangle\langle a_n| + \int_{\alpha \in D} \mathrm{d}\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{I} \ . \tag{9}$$

因为n只是计数指标，$|\alpha_n\rangle$自然是无量纲的；而$\alpha \in D$是具体的某个物理量，则$|\alpha\rangle$应是有量纲的。无量纲的状态矢量$|\alpha_n\rangle$与有量纲的状态矢量$|\alpha\rangle$并存于一个表达式中，狄拉克本人未试图消除这样的概念不一致，令人费解。状态表示忽而是无量纲的，忽而有量纲，难免会带来一些歧义。我们倾向于认同状态矢量都应该是无量纲的数学对象。在具体的表示里，波函数可以是有量纲的，但似也应改造为无量纲的。状态矢量与波函数是对应的关系，即$|n\rangle \to \psi_n(q)$。把状态表示为具体的波函数，是一个从抽象符号表达到用表示者表达的过渡。

依据狄拉克的观点，量子力学语境中，微观系统的状态不再是由一组物理量的数值表征的，而是由量子态矢表征的。态矢的演化遵守决定性的动力学方程(薛定谔方程)，它符合决定论。我们想强调，概率性是表现层面的问题，出现在决定物理量(的组合)以获得系统实在性认识的层面上。概率的出现自有其具体的机制。这样，薛定谔、玻恩、狄拉克、冯·诺伊曼等人关于量子力学的系列思想便表现出了一致性。爱因斯坦的疑虑与1935年的非完备性论证也便容易理解了。

3 量纲混乱的消除

在量子力学中，表示动力学系统状态的是希尔伯特空间里的矢量。希尔伯特空间是特殊的线性空间，状态矢量只要满足线性空间的一般性质，比如完备性关系，即可。就有限维空间而言，完备性条件$\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbf{1}$与量纲无关。这是抽象的数学关系。如前所述，在连续变量的情形产生了状态矢量有量纲的问题。在《量子力学原理》第四版的(52)式中，狄拉克注意到了状态矢量的量纲问题，故那里$|q\rangle$，$|p\rangle$的变换关系的表达式为

$$\begin{aligned} \langle p'|q'\rangle &= \hbar^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'q'/\hbar} \ , \\ \langle q'|p'\rangle &= \hbar^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'q'/\hbar} \ , \end{aligned} \tag{10}$$

因子$\hbar^{-\frac{1}{2}}$就是为了照顾量纲问题。这样看来，狄拉克对状态矢量作为有量纲量是持接受态度的。

然而，状态矢量可以具有量纲是会引出矛盾

的。一个状态矢量$|A\rangle$若有量纲，根据归一化要求应有$\left[|A\rangle\right]=[A]^{-\frac{1}{2}}$。现在将态矢$|A\rangle$在态矢集$\{|B\rangle\}$上展开：

$$|A\rangle=\hat{I}|A\rangle=\int \mathrm{d}B|B\rangle\langle B|A\rangle=\int \psi_A(B)|B\rangle \mathrm{d}B \ , \tag{11}$$

其中$\psi_A(B)=\langle B|A\rangle$，显然应有$\left[\psi_A(B)\right]=\left[\langle B|A\rangle\right]=[B]^{-\frac{1}{2}}[A]^{-\frac{1}{2}}$。然而，波函数$\psi_A(B)$应该理解为物理量$A$在态矢集$\{|B\rangle\}$表示下的波函数，是算符$\hat{B}$域上的概率幅，它的量纲应该是$[B]^{-\frac{1}{2}}$。坚持量子态矢应该一致地为无量纲的对象，就可以避免出现这样的矛盾。实际上，无量纲量子态矢表示确曾便利了量子力学的发展。

历史上，量子力学在处理谐振子问题时引入了从算符$(\hat{x},\hat{p})$到算符(a,a^+)的变换[17]，

$$\begin{aligned} a&=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,\hat{p}\ ,\\ a^+&=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,\hat{p}\ . \end{aligned} \tag{12}$$

这里的算符(a,a^+)都是无量纲的。相应地，哈密顿算符为$H=\left(a^+a+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$，对应能量$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$的本征态矢为

$$|n\rangle=\frac{(a^+)^n}{n!}|0\rangle\ . \tag{13}$$

如此构造的无量纲态矢在文献中被当作一种数学上的方便，其物理意义似乎没有引起特别的注意。

更一般地，算符$(\hat{x},\hat{p})$与算符(a,a^+)之间的变换可表示为

$$\begin{aligned} \hat{x}&=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varDelta}}\,(a+a^+)\ ,\\ \hat{p}&=\lambda\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\varDelta}{2}}\,(a^+-a)\ . \end{aligned} \tag{14}$$

逆变换为

$$\begin{aligned} a&=\lambda\sqrt{\frac{\varDelta}{2\hbar}}\,\hat{x}+\mathrm{i}\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{2\varDelta\hbar}}\,\hat{p}\ ,\\ a^+&=\lambda\sqrt{\frac{\varDelta}{2\hbar}}\,\hat{x}-\mathrm{i}\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{2\varDelta\hbar}}\,\hat{p}\ . \end{aligned} \tag{15}$$

其中的参量$\varDelta$其量纲必须是$[\varDelta]=[MT^{-1}]$，它的角色是保证算符(a,a^+)是无量纲的。在谐振子问题中，$\varDelta=m\omega$。此外，还有无量纲的自由参数λ，它具有标度变换的意义。这个变换让我们认识到相空间甚至存在规范自由度的问题，详细讨论见我们此前的文章[12, 18]。如何参照外尔当初引入规范场论的思路将这个思考引向深入，值得进一步研究。

我们认为状态矢量以及对应的波函数应该是且只能是无量纲的，这样可以使得量子力学的表示理论自身以及与其它理论内容一同参校时是相洽的、协调的，可以实现概念上的一致性。坚持使用无量纲状态矢量表示是可行的、有用的。历史上，无量纲的状态矢量曾溜进了量子力学，只是未深入讨论其意义。认识到这里有量纲问题，可以获得对问题更深刻的认识。

坚持状态矢量是抽象数学概念，状态矢量以及波函数都是无量纲的，对于分立状态情形这没有任何困难，问题出在采用$|q\rangle$，$|p\rangle$这样的连续变量表示时如何调和完备性关系$\int|q\rangle\langle q|\mathrm{d}q=I$中的量纲问题。构型空间(动量是其共轭存在)应该单独对待。其实，就是如何引入一个积分测度$\omega(q)$使得：

$$\int|q\rangle\langle q|\omega(q)\mathrm{d}q=I \tag{16}$$

成立同时保证$|q\rangle$无量纲的问题，这在物理上是允许的[18]。这也是统计物理处理对状态计数时曾遇到过的问题。这启发我们把量子力学发展史上起到过重要作用的相空间积分$\frac{1}{h}\mathrm{d}q\mathrm{d}p$看作是物理表示无量纲化的努力。对于涉及电子的量子力学问题，玻尔半径$a_0=\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2m_e}$的倒数也许是个合适的$\omega(q)$选择。

4 量子理论世纪之争的深度剖析

在对量子态矢/波函数的特性以及关于波函数的不同概率诠释做了一些澄清之后，必然会带来一些新的见解和认识。现在，可明确以下几点：(1)量子力学用以描述物理系统状态的是希尔伯特空间里的状态矢量，系统随时间的演化由状态矢量应满足的量子力学运动方程给出；(2)量子

力学的状态矢量/波函数是无量纲的存在；(3)关于波函数的概率诠释，薛定谔的与玻恩的有概念上的不同，薛定谔的诠释同玻恩的诠释经由狄拉克的态矢完备性相联系。基于上述几点展开分析，有助于厘清量子力学中的一些困惑以及争论。结合具体案例的分析可以更直观地触及问题的实质。

4.1 事例一：两自旋1/2粒子的纠缠态

在讨论纠缠态时，一般文献都会以自旋1/2粒子的二粒子系统为例。总自旋 $S = 0$ 的状态矢量可表示为

$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow^{(z)}\right\rangle_1\left|\downarrow^{(z)}\right\rangle_2 - \left|\downarrow^{(z)}\right\rangle_1\left|\uparrow^{(z)}\right\rangle_2\right), \quad (17)$$

其中$\left|\uparrow^{(z)}\right\rangle$，$\left|\downarrow^{(z)}\right\rangle$分别表示粒子自旋取$z$-方向的向上状态和向下状态，下标中的1，2是粒子的标签。注意，我们此刻在谈论自旋这个内禀自由度而z-方向却是来自系统外的标签。如此表示的纠缠态的含义是该状态由两个粒子自旋取相反方向的情形混合而成。一些通俗表述会将自旋取向同猫的生死状态相对应，断言(17)式对应的是两只猫一生一死的混合态。甚至是在某些严肃的学术文献中也这样理解(17)式中的纠缠态，即第一只猫处于生、第二只猫处于死的状态，以及第一只猫处于死而第二只猫处于生的状态。用猫的死活表示二值量子状态是对薛定谔1935年引入的放射性原子—锤子—毒药—猫模型的曲解[19]。这样的诠释其实是不恰当的，如今也有研究者公开指出了这一点[20]。必须认识到，粒子系统所处的状态是独立于我们的存在，但对状态矢量表示的物理诠释，直接的或者基于测量结果的诠释，却有研究者(观念)与测量系统这些外部因素的介入。这两者不是一回事儿。

形式上，(17)式的态矢$|B\rangle$也可表示为

$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow^{(x)}\right\rangle_1\left|\downarrow^{(x)}\right\rangle_2 - \left|\downarrow^{(x)}\right\rangle_1\left|\uparrow^{(x)}\right\rangle_2\right), \quad (18)$$

其中$\left|\uparrow^{(x)}\right\rangle$，$\left|\downarrow^{(x)}\right\rangle$分别表示粒子的自旋沿$x$-方向取向上和向下的状态矢量。态矢$\left|\uparrow^{(x)}\right\rangle$，$\left|\downarrow^{(x)}\right\rangle$同态矢$\left|\uparrow^{(z)}\right\rangle$，$\left|\downarrow^{(z)}\right\rangle$之间存在如下变换关系：

$$\begin{aligned}\left|\uparrow^{(x)}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow^{(z)}\right\rangle + \left|\downarrow^{(z)}\right\rangle\right), \\ \left|\downarrow^{(x)}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow^{(z)}\right\rangle - \left|\downarrow^{(z)}\right\rangle\right).\end{aligned} \quad (19)$$

如果坚持用薛定谔猫的形象作比喻，则态矢$\left|\uparrow^{(x)}\right\rangle$与$\left|\downarrow^{(x)}\right\rangle$都是描述猫处于半死半活的情形。还可以把讨论扩展到更一般的情形。取自旋沿任意的θ方向来表示总自旋$S = 0$的二粒子状态矢量，

$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow^{(\theta)}\right\rangle_1\left|\downarrow^{(\theta)}\right\rangle_2 - \left|\downarrow^{(\theta)}\right\rangle_1\left|\uparrow^{(\theta)}\right\rangle_2\right), \quad (20)$$

有变换：

$$\begin{aligned}\left|\uparrow^{(\theta)}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\left|\uparrow^{(z)}\right\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\left|\downarrow^{(z)}\right\rangle\right), \\ \left|\downarrow^{(\theta)}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\left|\uparrow^{(z)}\right\rangle - \sin\frac{\theta}{2}\left|\downarrow^{(z)}\right\rangle\right).\end{aligned} \quad (21)$$

如果用薛定谔猫的比喻来诠释这个表示，则态矢$|B\rangle$描述的是两只猫各以$[0, 1]$区间上某种程度的死活混合的情形。但是，作为等价的量子态描述式(17)与式(18)，以及一般性的式(20)，对它们却有完全不同的物理诠释，这带来了不自洽。问题显然出在对量子状态的不合逻辑的诠释上。我们将看到，对自旋这类量子态的测量也是一种在对系统施加扰动后可能还需要引入这种逻辑未必严谨的诠释的过程。实际上，这种表示中的一个要素，即那个指标z-或者x-，是外部强加的。

这引出了两个必需回答的问题：(1)如果认为式(17)、(18)和(20)中的态矢$|B\rangle$是等价的关于总自旋$S = 0$的自旋1/2粒子的两粒子系统状态的描述，那么它们真正的物理意义又是什么？(2)既然式(17)、(18)和(20)中不是二粒子系统存在的状态(我们认为关于存在的状态应是唯一、确定的)，那么相应的二粒子系统存在的状态又该是什么？稍后我们会回到这两个问题上来。

4.2 事例二：一维外部自由度问题

事例一是关于微观客体内部自由度的问题，下面再举一个外部自由度的例子。为简单起见仍讨论一维情形。一维外部自由度的系统可以用坐

标—动量对$(\hat{x},\hat{p})$来描述，也可以用产生—湮灭算符对(a,a^{+})来描述。采用表述(a,a^{+})，系统的态矢一般地可表示为

$$\left|\alpha,\beta\right\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)a^{+}}|0\rangle \ , \tag{22}$$

这是一个具有确定参量α,β的归一化相干态。对处于这样的状态的系统进行位置和动量观测，我们会期待什么样的结果呢?

首先计算位置期待值，

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \left\langle \alpha,\beta|\hat{x}|\alpha,\beta\right\rangle = (\langle 0|\mathrm{e}^{-\frac{1(\alpha^2+\beta^2)}{2}}\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)a})\times \\ &\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2\varDelta}}\ (a+a^{+})\right)(\mathrm{e}^{-\frac{1(\alpha^2+\beta^2)}{2}}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)a^{+}}|0\rangle) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\varDelta}}\ 2\alpha\mathrm{e}^{-(\alpha^2+\beta^2)}\langle 0|\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)a}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)a^{+}}|0\rangle \\ &= 2\alpha\sqrt{\frac{\hbar}{2\varDelta}}\ .\end{aligned} \tag{23}$$

上述计算中用到变换$\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2\varDelta}}\ (a+a^{+})$，其中$\varDelta$的量纲为$[MT^{-1}]$，是一个可以置于规范自由度之下的参数[12]。接下来，计算位置的涨落：

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 &= \left\langle \alpha\cdot\beta|(\hat{x})^2|\alpha\cdot\beta\right\rangle - (\bar{x})^2 \\ &= \frac{\hbar}{2\varDelta}\mathrm{e}^{-(\alpha^2+\beta^2)}(\langle 0|\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)a})[(\alpha+\mathrm{i}\beta)^2+(\alpha-\mathrm{i}\beta)^2 \\ &\quad +2(\alpha+\mathrm{i}\beta)(\alpha-\mathrm{i}\beta)+1]\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)a^{+}}|0\rangle - (\bar{x})^2 \\ &= \frac{\hbar}{2\varDelta}(4\alpha^2+1) - \left(2\alpha\sqrt{\frac{2\hbar}{\varDelta}}\right)^2 = \frac{\hbar}{2\varDelta}\ ,\end{aligned} \tag{24}$$

可见涨落不为零。除了位置期待值和涨落(二阶矩)外，还可继续计算所有的位置关于平均值的高阶矩。这些不为零的位置高阶矩意味着对系统作位置观测时会观测到一个在空间中分布的波包。这也是量子理论发展初期由薛定谔提出的由位置波函数所表征的波包概念。波包，也叫波列、波群，是一个经典物理概念。薛定谔在其1926年的本征值问题论文的第二部分首次在量子语境下将波包同粒子联系起来。紧接着他又试图构造可等同于点粒子的波包 [Erwin Schrödinger, Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik (从微观力学到宏观力学的丝滑过渡)，Die Naturwissenschaften 14，664—666 (1926)]。薛定谔用的是波群(Wellengruppe)一词， 若说波群的群速度就好理解多了。

现在计算动量的期待值以及动量涨落，有

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \left\langle \alpha,\beta|\hat{p}|\alpha,\beta\right\rangle = (\langle 0|\mathrm{e}^{-\frac{1(\alpha^2+\beta^2)}{2}}\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)a})\times \\ &\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\varDelta}{2}}\ (a-a^{+})\right)(\mathrm{e}^{-\frac{1(\alpha^2+\beta^2)}{2}}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)a^{+}}|0\rangle) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar\varDelta}{2}}\ 2\beta\mathrm{e}^{-(\alpha^2+\beta^2)}\langle 0|\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)a}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)a^{+}}|0\rangle \\ &= \sqrt{2\hbar\varDelta}\ \beta\ ,\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}(\Delta p)^2 &= \left\langle \alpha\cdot\beta|(\hat{p})^2|\alpha\cdot\beta\right\rangle - (\bar{p})^2 \\ &= \frac{\hbar\varDelta}{2}\mathrm{e}^{-(\alpha^2+\beta^2)}(\langle 0|\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)a})(2(\alpha+\mathrm{i}\beta)(\alpha-\mathrm{i}\beta) \\ &\quad -(\alpha+\mathrm{i}\beta)^2-(\alpha-\mathrm{i}\beta)^2+1)\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)a^{+}}|0\rangle - (\bar{p})^2 \\ &= \frac{\hbar\varDelta}{2}(4\beta^2+1) - (2\hbar\varDelta)\beta^2 = \frac{\hbar\varDelta}{2}\ ,\end{aligned} \tag{26}$$

动量涨落不为零。更高阶的动量关于动量平均值的矩也不为零。如前，这意味着当我们去对该状态作动量观测时，它表现为一个动量空间中的波包。

基于上述两个事例的具体计算与分析可以认清如下几点。

从(22)式看到，这是一个参量确定为(α,β)的无量纲的态矢，是一个属于量子态矢空间的确定的矢量。这也是量子力学关于物理系统状态所能给出的描述，如果非要说还有补充，那就是还有相应的物理量的算符表示。但是，当我们试图去认知系统的物理性质，这里是位置和与之共轭的动量，总是要通过观测具体的某一(组)物理量来获得信息。此在量子力学的理论中，表现为用力学量的算符作用到状态矢量上[16]。如果是去作位置的观测，假设电子与光子之类的微观系统能泄露自身的位置故没有节外生枝，则观察结果表现为坐标空间的一个波包。如果是去作动量的观测，则观察结果表现出一个动量波包。

由此我们看到，微观客体客观存在的状态原则上应是(22)式那样的量子态矢空间中的一个确定的状态，是一个抽象的存在，它既不是位置波包也不是动量波包。或者说，一个物理状态的态矢，取决于后继的操作才表现出具体的(有量纲的)物理量，构成我们关于物理状态之实在性的认

识，比如是一个空间波包或者动量波包。状态由无量纲的函数表示，而由它提取到的物理量是有量纲的。

基于事例二的讨论我们可以给出这样的观点，量子体系的状态事关客体的存在性，它与观测无关。至于什么是客体的实在性，则指的是去检验物理系统的存在时通过各种物理操作所获得的信息总和，包括前面已讨论的位置波包，动量波包，以及其它可能存在的信息。

现在回头来讨论第一个事例并回答在那里留下的问题。相较于第二个事例，我们在第一事例的讨论中实际上只涉及到描述该系统状态的态矢，即只论及了该系统的存在性，而没有涉及构造系统实在性的信息获取过程。如果要谈观测，必须确定要观测的是什么物理量，以及采用什么样的实验装置与手段，比如施加外场。

前面谈到态矢$|B\rangle$的三种表示式(17)，式(18)和式(20)，其实都是关于同一个确定的系统状态在不同表象中的不同表示而已，是关于两自旋1/2粒子系统总自旋为$S=0$的态矢，即

$$\begin{aligned}|B\rangle&=|S=0\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow^{(z)}\right\rangle_1\left|\downarrow^{(z)}\right\rangle_2-\left|\downarrow^{(z)}\right\rangle_1\left|\uparrow^{(z)}\right\rangle_2\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow^{(x)}\right\rangle_1\left|\downarrow^{(x)}\right\rangle_2-\left|\downarrow^{(x)}\right\rangle_1\left|\uparrow^{(x)}\right\rangle_2\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow^{(\theta)}\right\rangle_1\left|\downarrow^{(\theta)}\right\rangle_2-\left|\downarrow^{(\theta)}\right\rangle_1\left|\uparrow^{(\theta)}\right\rangle_2\right).\end{aligned}\quad(27)$$

至此这是在谈论一个两自旋$\frac{1}{2}$粒子体系的存在性问题。至于该系统的实在性问题，即通过观测获得关于该状态的中肯的信息，还需要补充讨论。观测该系统的操作过程是需要设计并加以审视的，也是物理之所在，仅从态矢在不同表象中的表示尚不足以谈论其实在性。但是，实际上我们在谈论这个存在性的表示时已经使用了一些探测这个系统所得到的实在性的信息了。

对于自旋这类内禀自由度，当其在外场扰动下被测量时(它就是这么被注意到其存在的)，则系统的哈密顿量要加微扰项，然后考察具体物理量的本征值如何表现。一个自旋$\frac{1}{2}$的粒子在磁场中的行为由它的磁矩$\vec{M}$来表征。为了获取磁矩的信息，外加磁场是必须的。当实验中的磁场取向是z-的方向时(似乎是磁场规定了我们能获得的信息，而后基于这些信息去构造一个合理的模型)，方便的选择是态矢表示采用式(17)，此时沿z方向的磁矩$\hat{M}_z\propto\hat{s}_z$的算符矩阵为

$$\hat{s}_z=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\quad(28a)$$

故作磁场中的观测时，第一粒子塌缩到$\left|\uparrow^{(z)}\right\rangle$第二粒子塌缩到$\left|\downarrow^{(z)}\right\rangle$，或者第一粒子塌缩到$\left|\downarrow^{(z)}\right\rangle$第二粒子塌缩到$\left|\uparrow^{(z)}\right\rangle$。这时候通俗的说法第一只猫活第二只猫死，或第一只猫死第二只猫活，才有意义。

如果在外磁场取z-方向时，对系统的态矢采用式(18)的表示是否可以呢？这种做法当然是允许的。不过，在换了表象后算符$\hat{s}_z$的表示矩阵变成了：

$$\hat{s}_z=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}.\quad(28b)$$

则在外磁场取z-方向的实验安排下观测的结果对应两只猫都同样处于又死又活的状态。可见这种附加的诠释是不合适的。

关于原子物理实验，基本上都是光和电子在其中扮演信使的角色。所谓对物理现实的测量，很大程度上也基于我们对光和电子的认识，包括对光与电子的测量，这实际是一个迭代的过程。概率性表现出现在获取实在性的过程中。是在外部强加的提取过程中表现出了的概率，这大概就是狄拉克所谓的“概率给到你手上”。实际上，因为现实的空间分辨极限远大于电子之类粒子的尺度，关于电子的位置波包之类的概念仅停留在理论或者表述层面，它不是实验意义上的事实，也不可能在实验层面上被证实。

所谓的测量，其中一个关键因素是对体系的扰动。狄拉克的量子力学扰动理论处理了修改运动状态的和原有能级不变但引起跃迁的两类扰动，后者显含时间t。但是，对于解析自旋这种内禀自由度的测量来说，仅仅认为扰动修改了运动状态(解除自旋能级简并)似乎还不够。一个明显的事

实是，关于自旋问题的处理迅速引入了泡利方程，而那里的波函数是两分量的[21]。这时的波函数概率诠释，还牵扯到在两个自旋本征状态上的分配。此处典型的是，我们基于已有理论与实验观察在更高的层面上构造了一个新的理论。

5 小结

量子系统存在的状态由希尔伯特空间中的态矢唯一地确定，态矢的演化方程是决定性的。我们认为应当坚持态矢/波函数采取无量纲的形式。确定了待测的物理量(算符)，必要时还要确定获取该物理量的实验方案，即当存在的状态矢量、物理量算符以及实验方案都确定下来时，才能谈论关于体系的测量结果，构建所关切对象的实在性。存在性与实在性具有不同的含义。历史上的一些关于量子力学诠释的争论，混淆了这两个基本概念是重要原因之一。爱因斯坦看重的量子描述的确定性，应该在存在性的意义上加以理解。爱因斯坦的“上帝不掷骰子”所质疑的也是“波函数为构型空间中演化的函数”此一理念，而非是质疑量子力学的概率特质。关于量子力学的概率特质，可以归于实在性的范畴，如狄拉克所言，只当一些带概率的信息塞到你手里，才会得到带概率的结果。关于波函数存在多种诠释，在谈论量子力学问题时不宜混淆。冯·诺伊曼测量理论中的概率是同玻恩的概率诠释相一致的，但同薛定谔自己关于波函数ψ，确切地说是$\psi\bar{\psi}$，的诠释是不一致的。狄拉克关于波函数ψ是变换函数的诠释，不应该被遗忘。

参考文献

[1] Born M. Zeitschrift für Physik，1924，26：379

[2] Dirac P A M. The Principles of Quantum Mechanics，1st edition. Oxford University Press，1930

[3] Dirac P A M. The Principles of Quantum Mechanics，4th edition. Oxford University Press，1958

[4] von Neumann J. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (量子力学数学基础). Springer，1932

[5] Dirac P A M. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society，1939，35 (3)：416

[6] Einstein A，Podolsky B，Rosen N. Physical Review，1935，47 (10)：777

[7] Bohr N. Physical Review，1935，48 (8)：696

[8] Beller M. Quantum Dialogue. University of Chicago Press，1999

[9] Kumar M. Quantum—Einstein，Bohr and The Great Debate About the Nature of Reality. Icon Books，2009

[10] Howard D. Revisiting the Einstein-Bohr Dialogue (来自互联网)

[11] Albert D Z. Quantum Mechanics and Experience. Harvard University Press，2000

[12] 汪克林，高先龙，曹则贤. 物理，2023，52(9)：625

[13] Schrdinger E. Annalen der Physik，(I)，1926，79：361；(II)，1926，79：489；(III)，1926，80：437；(IV)，1926，81：109

[14] Dirac P A M. Proc. R. Soc. Lond. A，1927，113：621

[15] Born M. Zeitschrift für Physik，1926，37：863

[16] von Neumann J. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen，1927：1

[17] Dirac P A M. Proc. Roy. Soc. London Ser. A，1927，114 (767)：243

[18] 汪克林，高先龙，曹则贤. 物理，2021，50(3)：177

[19] Schrödinger E. Naturwissenschaften，1935，23 (48)：807

[20] Albert D Z. Quantum Mechanics and Experience. Harvard University Press，2000

[21] Pauli W. Zeitschrift für Physik，1927，43 (9-10)：601