

粒子与集体行为

牛谦^{1,†} 王志^{2,††} 肖聪^{3,†††} 张力发^{4,††††}

(1 中国科学技术大学物理学院 合肥 230026)

(2 中山大学物理学院 广州 510275)

(3 澳门大学应用物理及材料工程研究院 澳门 999078)

(4 南京师范大学物理科学与技术学院 南京 210023)

2024-09-12 收到

† email: niuqian@ustc.edu.cn

†† email: wangzh356@mail.sysu.edu.cn

††† email: xiaoziche@gmail.com

†††† email: phyzlf@njnu.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20241001

CSTR: 32040.14.wl20241001

Particles and collective behavior

NIU Qian^{1,†} WANG Zhi^{2,††} XIAO Cong^{3,†††} ZHANG Li-Fa^{4,††††}

(1 School of Physical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

(2 School of Physics, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China)

(3 Institute of Applied Physics and Materials Engineering, University of Macau, Macau 999078, China)

(4 School of Physics and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

摘要 布洛赫电子的运动受到贝里曲率的影响, 已是人们熟知的量子几何效应。凝聚态系统中的各种集体行为, 以及它们与电子系统的耦合, 为量子几何现象的探索提供了更加广阔的舞台。针对几种典型的对称破缺状态, 文章就下列方向中的有关研究和应用作出简略回顾和展望, 包括晶格振动与声子、磁化动力学与自旋波、玻色凝聚体与量子涡旋、超导序参量与准粒子以及晶格形变与人工引力。

关键词 贝里曲率, 集体模式, 对称性破缺, 声子, 分子贝里曲率, 磁化动力学, 广义法拉第力, 磁振子, 玻色凝聚体, 量子涡旋, 超导, 博戈留波夫准粒子, 晶格联络, 人工引力

Abstract The influence of Berry curvature on the motion of Bloch electrons is a well-established quantum geometric effect. However, the diverse collective behaviors within condensed matter systems, along with their coupling to electron dynamics, offer an even broader platform for exploring quantum geometric phenomena. In this article, we provide a concise review and outlook on the study of quantum geometric effects across several typical symmetry-breaking states, including lattice vibrations and phonons, magnetization dynamics and spin waves, Bose-Einstein condensates and quantum vortices, superconducting order parameters and quasiparticles, as well as lattice deformations and artificial gravity.

Keywords Berry curvature, collective mode, symmetry breaking, phonon, molecular Berry curvature, magnetization dynamics, generalized Faraday force, magnon, Bose-Einstein condensate, vortex, superconductivity, Bogoliubov quasiparticle, lattice connection, artificial gravity

粒子和集体行为是凝聚态物理^[1, 2]的两大主题。在基本层次上有电子和原子核, 后者一般被视为点电荷, 不涉及其内部结构。通常也把填满了的内层电子和原子核一起当作一个惰性的离子, 只考虑外层电子在这些离子背景下的行为。惰性原子中, 所有电子都处于满壳层中, 原子就被当作基本单元。在气态玻色—爱因斯坦凝聚问题中, 由于原子间的远距离, 未填满壳层的电子一般也不独立考虑; 基态附近的电子精细结构只是作为原子的少数几个内部态, 参与到气体原子的外部状态中。

固体的最简单结构是晶体, 其中原子在空间周期排列。惰性原子晶体的结合靠的是远程的范德瓦耳斯吸引力和近程的电子云之间的排斥。离子晶体的结合靠的是原子间电子转移的能量差, 以及带电离子间的库仑作用和电子云之间的近程排斥。在其他类型的晶体中, 外层电子的状态发生强烈的重组; 有时聚集在俩俩离子之间, 形成所谓共价键; 有时弥漫在所有空隙处, 形成所谓金属键。

材料中的磁性主要来自电子, 其中自旋和原子内层的轨道运动又贡献了磁性的绝大部分。对于分离的原子或离子, 由于泡利不相容原理和库仑相互作用, 未填满壳层中电子的多体状态往往具有非零的总角动量和若干玻尔磁子量级的磁矩。成为固体后, 参与原子结合的那部分轨道发生角动量淬灭, 剩余的磁矩倾向指于同一方向(铁磁耦合), 或在相邻原子间指于相反方向(反铁磁耦合)。

晶体和磁性代表了两种典型的对称性破缺。相对于气液状态, 晶体破坏了连续的空间平移和旋转对称, 只留下分立的晶格平移和若干旋转反射等对称。相对于非磁状态, 磁性状态破坏了时间反演对称, 以及由于自旋取向而破坏了的旋转对称。前面三篇文章(详见《物理》2024年第1、4、7期)关注的是晶体结构和与之适配的自旋序中的布洛赫电子, 本文开始考虑这些结构和自旋序参量的动力学问题, 探讨其中的拓扑几何性质, 以及与布洛赫电子的相互作用。在平衡状态附近, 微小的原子振动和自旋偏转会形成集体运动模式, 其量子化表现就是常说的声子和磁振子, 像光子

一样遵从玻色—爱因斯坦统计。

本文也关注超流和超导, 由所谓规范对称破缺引起的宏观量子秩序。玻色气体在低温下会发生动量空间的凝聚, 有宏观数目的粒子处于同一量子态中, 用一个所谓凝聚体波函数来描述。电子等费米子不能直接发生这种凝聚, 但吸引相互作用会使费米面上的粒子配对并发生凝聚。超导准粒子是些电子和空穴的叠加, 仍然遵从费米—狄拉克统计, 也有布洛赫能带的结构。准粒子波函数中蕴藏着丰富的量子几何内容, 从中也可以推断超导体的整体拓扑行为。

上述铁磁材料中的磁序指向和超导材料中的配对势代表了这些材料的序参量, 而序参量的运动会紧密地耦合于电子系统。当序参量随时间缓慢变化的时候, 电子系统的响应可以利用量子绝热理论方法来处理。电子系统的能量依赖于序参量, 可以被视作序参量的势能。电子多体基态也会依赖于序参量, 给出序参量空间的一个贝里曲率。如果序参量随空间的变化也是缓慢的, 我们还可以进一步采用半经典方法^[3, 4]来描述电子系统的响应。

这个方法当然也适用于晶体的形变。传统的玻恩—奥本海默方法就是采用电子系统的绝热近似, 把电子系统的能量视作原子位形空间的一个势能。近年来, 为了把时间反演破坏引入声子系统, 人们开始考虑分子贝里曲率, 即电子多体基态贡献的在原子位形空间上的贝里曲率。本文也关注随时空缓慢变化的晶体形变, 其中布洛赫粒子的运动和半经典效应, 以及它们对形变动力学的反馈作用。我们需要引入晶体联络这个几何概念, 来有效地描述形变对于布洛赫粒子的种种影响, 类似于广义相对论中的引力作用。

1 晶格振动与声子

固体物理的教科书^[5, 6]往往以原子的晶体结构开始, 描绘其平移等空间对称性, 介绍其衍射实验探测, 勾画其结合的各种物理机制。现代晶体结构理论基于第一性原理计算, 可以预言各种简单材料的晶体结构和得出精确的原子间距。由于

离子质量远远重于电子，可以首先忽略它们的运动，专注在固定离子位形下电子的量子状态。离子之间的库仑能加上电子系统基态的总能量给出材料的结合能，其最小值对应的离子位形就是材料在低温下呈现的原子结构。这往往就是某种晶体，具有特定晶格常数和旋转反演等对称。

声子的激发对应于离子的微小振动，其势能来自结合能随离子位移的偏差。势能准确到偏差的二阶，也就是简谐近似，运动方程可以解出一系列本征振动模式来。相应晶体平移对称的晶格动量是好量子数，让本征频率在布里渊区呈现出能带结构。最低三支能带叫做声学支，其频率随动量变小线性趋于零，斜率给出声波速度。往上若干支能带称为光学支，因为这些振动模式往往伴随着正负离子电荷的相对位移，可以与电磁波耦合。在动量为零或布里渊区其他高对称点处，振动模式保持晶格某种旋转对称，具有特定的准角动量，在散射过程中遵循相应的选择定则^[7]。

早年，爱因斯坦、德拜和玻恩等人指出这些振动模式也像电磁波那样量子化，以频率乘以普朗克常数为能量单位出现。这些量子称为声子，遵从玻色—爱因斯坦统计，在低温下的比热也像黑体辐射那样趋于零，成为新量子力学应用的一个成功典范。在常温下，声子是固体热容量和热传导的主要载体，也是传导电子的主要散射源。近年来，人们观察到热霍尔效应，开始关注声子的拓扑几何性质。

像电子的布洛赫波一样，声子的波函数也可以有贝里曲率^[8, 9]。内禀热霍尔效应要求时间反演破坏，否则贝里曲率在等能面上的积分为零。在早期的研究模型里，除了引入磁场直接作用在离子上的洛伦兹力以外，常常还引入一个唯象的自旋声子耦合，来造成时间反演破坏的效果。这些研究也进一步揭示了声子拓扑边缘态的可能^[8]，为热输运和声子操控提供了新的手段。

与贝里曲率有相同对称性质的还有声子的角动量，来自离子围绕平衡位置的圆偏振动。早年爱因斯坦与德哈斯曾经合作过一个磁旋比的测量，来验证铁磁材料中分子环流的假设。他们计及了电子的轨道角动量，后续的此类实验又计及了自

旋，但都忽略了声子对角动量的贡献。计算表明，尽管在高于德拜温度的经典区域这种贡献趋于零，但在低温下声子的角动量可以与电子的轨道角动量比拟^[10]。最近的实验表明，声子确实可以是材料中角动量的一个藏匿之处^[11]。

空间反演破坏也可以造成非零的声子贝里曲率和角动量，只是在时间反演对称保持的情况下，它们是动量的奇函数。二维半导体和其他材料的声子谱中确实有它们丰富的分布，而且往往集中在时间反演破坏但具有旋转对称的动量点线上。在这种对称点线上，声子还具有量子化的准角动量，从而具有确定的手性^[7]。这种手性声子可由电子谷间散射产生或吸收，并在圆偏光电过程中显现。在动量为零处，声子也可具有手性，但由于时间反演对称，左右必须成对简并。在磁场中它们的能级发生劈裂，其随磁场变化的斜率显示，声子可以具有玻尔磁子量级的磁矩^[12]，远非传统的离子模型所能解释。这种情况下，我们就必须引入强电声耦合甚至拓扑效应来理解^[13]。

上述自旋声子耦合模型只适合于特殊情形。一般情况下，应该考虑电子系统在原子位形空间上的贝里曲率，称作分子贝里曲率^[14]（不同于上述声子贝里曲率），来体现晶格振动的时间反演破坏（Box 1）。早在其《晶格动力学》的经典著作^[15]中，黄昆与玻恩曾经形式上引出了这种规范作用。后来，为了解释某些分子的转动能量谱，米德等人^[16]引入了电子状态在分子位形空间的几何相位，但限于时间反演对称的情形。近年来，考虑到电子状态的时间反演破坏，非零的分子贝里曲率才真正开始被应用在晶格和分子的动力学问题中。

2 电子磁性及其运动

关于磁性，早年曾有海森伯的局域磁矩和布洛赫的巡游磁矩两种对立的观点^[17, 18]。一般说来，稀土元素由未满 f 壳层贡献的磁矩在材料中保持局域和独立特征，它们的耦合可以由海森伯模型很好地描述。海森伯模型广泛流行于文献和教科书中，因为它更方便于描述自旋波激发和复杂的相变过程。过渡元素 d 壳层中的电子也贡献较大

Box 1 声子角动量和手性

在磁性晶格体系中，声子的时间反演对称性被打破，这可以通过磁场直接作用于离子电荷产生的洛伦兹力或者是唯象的自旋声子耦合模型来理解。定义声子的角动量为

$$\mathbf{J}^{\text{ph}} = \sum_{l\kappa} M_{\kappa} \mathbf{u}_{l\kappa} \times \dot{\mathbf{u}}_{l\kappa},$$

其中 $\mathbf{u}_{l\kappa}$ 是第 l 个原胞中的第 κ 个原子的位移， M_{κ} 是对应原子的质量。低温下声子角动量具有可与电子轨道角动量比拟的量级，可以对爱因斯坦—德哈斯效应产生影响。

对于更一般的情况，我们考虑电子系统在原子位形空间上的贝里曲率，以将电子态的时间反演破缺引入到晶格动力学中，称作分子贝里曲率：

$$G_{\kappa'\beta}^{\kappa\alpha}(\mathbf{R}_l, \mathbf{R}_{l'}) = 2\text{Im} \left\langle \frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{R}_{l', \kappa'\beta}} \left| \frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{R}_{l, \kappa\alpha}} \right. \right\rangle.$$

在玻恩—奥本海默近似下，在给定的晶格构型 $\{\mathbf{R}\}$ 下，电子会停留在其瞬时基态 $|\phi_0(\{\mathbf{R}\})\rangle$ 上。分子贝里曲率 $G_{\kappa'\beta}^{\kappa\alpha}$ 表示第 l 个原胞的第 κ 个原子沿 α 方向的运动对第 l' 个原胞的第 κ' 个原子沿 β 方向的运动产生的影响。当晶格构型演化时，电子的基态会以绝热方式演化并积累一个几何相位，反过来修改晶格动力学方程，

$$M_{\kappa} \ddot{\mathbf{u}}_{k, \kappa} = -\mathbf{D}_{\kappa'}^{\kappa}(\mathbf{k}) \mathbf{u}_{k, \kappa'} + \mathbf{G}_{\kappa'}^{\kappa}(\mathbf{k}) \dot{\mathbf{u}}_{k, \kappa'},$$

从而破坏声子的时间反演对称(图1)。这里的 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{D}(\mathbf{k})$ 和 $\mathbf{G}(\mathbf{k})$ 表示原子位移、动量空间中的动力学矩阵和分子贝里曲率。

当体系保持时间反演对称而破坏空间反演对称时，声子角动量是动量的奇函数。在具有旋转对称性的动量点线上的声子具有角动量，是圆极化的，具有特定的手性(图2)。

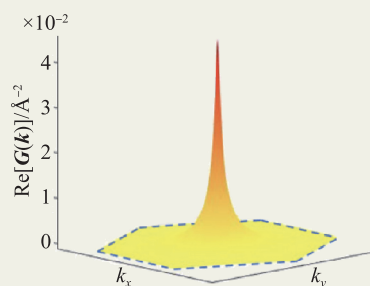


图1 分子贝里曲率在声子布里渊区的分布，体系破坏了时间反演对称性^[14]

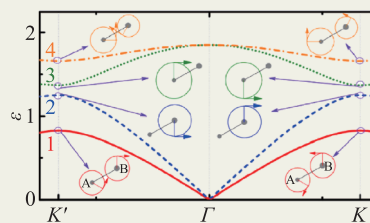


图2 破坏了空间反演对称性的六角AB晶格中的手性声子^[7]

的磁矩，但层中轨道状态在晶体中发生杂化重组，因而巡游磁矩观点更为合适。现代磁性的定量计算基于自旋密度泛函理论，其中布洛赫电子感受到的科恩—沈自洽势场还依赖于自旋状态。

我们假设材料已经具备某种稳定的磁序，只是其整体方向可以有相对自由的转动。以单畴铁磁为例，磁化方向的运动传统上由朗道—栗夫席兹—吉尔伯特(LLG)方程描述^[19, 20]。其思路是，磁化角动量的变化率由体系受到的力矩给出，其中一部分来源于磁各向异性以及外磁场的作用。各向异性的内禀部分源于自旋轨道耦合，依赖于晶体对称性；还有个外禀部分，源于磁杂散场能量，依赖于材料的整体形状。此外，还有一个阻尼力矩由吉尔伯特唯象地引入。

微观层次上，该怎样处理磁序参量运动与电子系统的耦合呢？我们假设磁序方向的转动足够缓慢，电子系统始终处于与之对应的瞬时多体基态。利用薛定谔方程的变分原理，可以得到一个

序参量的运动方程^[21, 22]。这个方程描绘了磁化矢量空间里一个广义磁化力与广义洛伦兹力的平衡，前者由基态能量对序参量的导数给出，物理上代表了一个等效磁场，后者等于基态在序参量空间上的贝里曲率叉乘序参量的时间导数(Box 2)。

这个广义力平衡方程可以做诸多方面的推广。在有限温度下，假设电子系统始终处于序参量下的瞬时平衡状态，那么上述基态能量就要修改成为自由能，贝里曲率也要对各能量本征态做统计平均。我们也可以考虑在费米面附近电子受到磁序转动的微扰，由此造成的电子非平衡分布会在上述平衡方程中添加上一个广义阻尼力^[23]。至此，我们可以看出LLG方程实际上等价于这个平衡方程，其效果上只是假设了特定形式的贝里曲率和阻尼力。

为了方便研究电磁耦合，人们往往把深层能量的电子隐去，认为它们只是提供了基本的磁性及其各向异性能和磁旋比，而单独列出费米面附

近的电子自由度。所谓sd耦合模型就是一个常见的例子^[24]，我们也曾考虑过拓扑表面态电子与紧贴着的磁体的耦合模型^[25]。根据广义力平衡理论，耦合的电子系统不仅可以改变等效磁场，把阻尼

与电子的非平衡激发联系起来，也可以造成磁旋比的各向异性。

用电学手段驱动磁化是个重要的信息技术前沿，研究过程中人们在LLG方程里引入过许多种

Box 2 电子与磁化系统的耦合

假设单畴铁磁体序参量 $\mathbf{m}$ 的转动相对于电子运动极其缓慢，从而可以作为标定电子布洛赫态 $|\psi_{nk}[\mathbf{m}]\rangle$ 的绝热参数。根据薛定谔方程的变分原理^[3]，文献[23]给出电子波包的拉格朗日量(以下省略能带指标)：

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{k}, \dot{\mathbf{k}}, \mathbf{m}, \dot{\mathbf{m}}) = -[\varepsilon - e\phi(\mathbf{x}, t)] + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{A}_k \cdot \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{A}_m \cdot \dot{\mathbf{m}},$$

其中 $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ 是电子波包在相空间的中心位置， ε 是电子能量，外电场 $\mathbf{E}$ 由标势 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 导出。 $\mathbf{A}_k = \langle \psi | i\partial_{\mathbf{k}} | \psi \rangle$ 和 $\mathbf{A}_m = \langle \psi | i\partial_{\mathbf{m}} | \psi \rangle$ 分别是电子布洛赫态在晶格动量空间和磁序参量空间的贝里联络。这里假设 $\mathbf{m}$ 是空间均匀的；缓慢的空间非均匀性可以类似地通过计入坐标空间中的贝里联络加以考虑。

电子作用量关于 $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ 的欧拉—拉格朗日方程给出电子半经典运动方程：

$$\dot{\mathbf{x}} = \partial_{\mathbf{k}} \varepsilon - \boldsymbol{\Omega}_{kk} \cdot \dot{\mathbf{k}} - \boldsymbol{\Omega}_{km} \cdot \dot{\mathbf{m}}, \quad \dot{\mathbf{k}} = -e\mathbf{E}.$$

可以看到，磁化的运动 $\dot{\mathbf{m}}$ 给出电子的一个绝热电流，符合绝热微扰的一般预期。这里沟通磁化和电子运动的是一个量子几何量：动量—磁序参量混合空间的贝里曲率张量，

$$\boldsymbol{\Omega}_{km} = \partial_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_m - \partial_{\mathbf{m}} \mathbf{A}_k.$$

另一方面，电子作用量关于序参量 $\mathbf{m}$ 的欧拉—拉格朗日方程对电子自由度求和后给出磁化的运动方程。如果我们考虑绝缘体，则磁化与电子耦合引起的绝热运动是无耗散的，此时该耦合贡献的磁化动力学描述了序参量空间中的广义力平衡^[23]：

$$\dot{\mathbf{m}} \times \int [\mathrm{d}\mathbf{k}] \boldsymbol{\Omega}_m - \partial_{\mathbf{m}} G^e + e\mathbf{E} \cdot \int [\mathrm{d}\mathbf{k}] \boldsymbol{\Omega}_{km} = 0,$$

其中 $\int [\mathrm{d}\mathbf{k}]$ 代表对电子占据态的积分。这个力平衡方程的第一项叫做序参量空间中的广义洛伦兹力，正比且垂直于电子体系关于序参量的贝里曲率^[21, 22]：

$$\boldsymbol{\Omega}_m = \partial_{\mathbf{m}} \times \mathbf{A}_m.$$

第二项是由电子体系总能量 G^e 的磁化依赖给出的一个保守力。第三项叫做广义法拉第力，其中再次出现了混合空间的贝里曲率 $\boldsymbol{\Omega}_{km}$ 。它代表电场通过绝热电流对电子—磁化耦合系统输入能量，用来驱动序参量的运动。法拉第力在序参量耦合运动路径上的做功与动量—序参量混合空间的陈数直接联系，其是否非零与路径的具体形态无关，仅取决于该路径所包围区域的拓扑，即是否包含使电子系统能隙闭合的序参量构型^[25]，如图3所示的例子。

上述序参量的几何动力学理论可以与描述磁化运动的传统理论即朗道—栗夫席兹—吉尔伯特(LLG)方程建立对应，对方程中出现的唯象系数给出电子系统的贡献尤其是电场引起的修正。如在外电场为零的情况，绝缘体电子—磁化耦合引起的磁化运动方程可以写成朗道—栗夫席兹方程的形式^[21, 22]： $\dot{\mathbf{m}} = -\gamma^e \mathbf{m} \times \mathbf{H}^e$ ，其中 $\mathbf{H}^e = -\partial_{\mathbf{m}} G^e$ 是通常所谓的有效磁场(电子贡献)；而 γ^e 是电子引起的磁旋比，它包含了序参量空间电子贝里曲率的信息： $\int [\mathrm{d}\mathbf{k}] \boldsymbol{\Omega}_m = \mathbf{m}/\gamma^e m^2$ 。模型计算显示， γ^e 的量级可以与其他来源的磁旋比相比拟^[23, 24]。在考虑磁化动力学时，需要计入电子系统对磁旋比的贡献。在外电场不为零时，它可以通过电子系统影响磁动力学，包括改变磁旋比，引起自旋转矩。而若考虑金属体系，费米面附近电子的弛豫过程还会引起序参量运动的吉尔伯特阻尼^[23]。这些都可以通过上面发展的电子—序参量耦合系统的几何动力学理论框架加以分析。

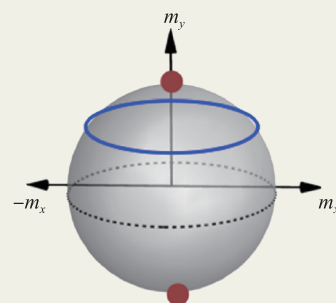


图3 磁序参量空间中广义电动势非零的路径。在二维拓扑绝缘体和一维磁线紧贴的界面电子系统中，磁化矢量的参数空间——布洛赫球的南北极为能隙闭合的奇点。因此以图中路径为边界的区域必定包含奇点，广义电动势在该路径上的积累是非零的拓扑整数^[25]

类的外来力矩,包括自旋转移力矩、自旋轨道力矩,等等。这些都能在微观上,通过能量和贝里曲率等渠道,在广义力平衡方程中反映出来^[26]。此外,还可以有一个类似法拉第电动势的、非保守非耗散的广义力作用在序参量上。作为具体例子,考虑一个由磁序参量打开能隙的电子能带。在特殊条件下,序参量的转动会造成能带中一个绝热泵浦电流。在电场驱动下,这个泵浦电流不但消耗能量,反而会输入能量来弥补磁序运动中的吉尔伯特损耗^[25]。

上述绝热耦合理论也可以推广到序参量非均匀的情形。比如,考虑自旋波的激发,就需要把均匀磁序改为某个傅里叶分量。基于我们的运动方程,第一性原理计算给出的铁磁自旋波能谱与实验结果非常吻合^[27]。对于反铁磁序,我们也可以类似地通过绝热微扰,利用能量和贝里曲率来计及电子系统及其低能运动的相互影响^[28-31]。

3 玻色凝聚体的演化

早年爱因斯坦曾预言,粒子数守恒的玻色气体在低温下会凝聚在一个动量处^[32]。后来,这被用来解释液氦超流现象,因为普通⁴He原子由6个费米子构成,包括两个质子、两个中子和两个电子,整体上表现为一个玻色子。多年后,人们制备了近乎无相互作用的超冷原子气体,明确无误地观察到了玻色凝聚^[33, 34]。通过调节原子间的相互作用,观察凝聚体运动的稳定性,清晰地建立与超流现象的联系;也可以利用原子的内部态以及外加势场,进一步丰富玻色凝聚体的物理内涵。

在外势中,凝聚体由粒子所在单态的波函数来描述,其绝对值平方代表粒子数密度,其相位的空间梯度,乘以普朗克常数再除以原子质量,就代表了凝聚体中粒子的速度。这样,由于有大量粒子的占据,原本代表几率幅度的波函数就直接反映了这个量子流体的经典图像。在短程作用的情况下,描述凝聚体运动的是一个非线性薛定谔方程。除了通常的动能和势能项之外,方程中还有个依赖于波函数的非线性势能,正比于

粒子数密度,表达一个粒子受到其他粒子的平均作用^[35, 36]。

为了建立与超流的联系,博戈留波夫考虑了排斥相互作用,微扰计算了凝聚体的准粒子激发^[37]。他发现其高能部分对应于自由原子,但低能部分获得了线性的能动量关系,跟流体中的粒子密度涨落类似,也称作声子。在一个均匀流动的凝聚体中,这些激发的能谱发生多普勒移动,加了一项动量与流速的乘积。只要流动速度小于声速,不让激发能变负,凝聚体就仍然保持稳定,正符合超流的特性。液氦超流中,低动量激发确实也是些声子,但由于原子间短程有序,能谱在高动量处有个软化(旋子),让临界速度比声速有所降低^[38]。

除了准粒子,凝聚体还可以承载量子涡旋等拓扑激发。环绕涡旋中心,凝聚体速度的线积分(环量)是量子化的,以普朗克常数和原子质量的比值为单位,因为波函数的相位只能有个 2π 整数倍的变化。经典流体中,涡旋会受到一个横向力,正比于流体相对涡旋的流密度,称为马格努斯力。通过计算量子涡旋的移动在多体系统中造成的贝里相位,可以获得量子流体中的马格努斯力,结果也正比于超流密度^[39]。

有限温度下,按照传统的二流体理论的说法^[40],正常流与超流并存。它们各自是如何作用于量子涡旋呢?索里斯等人证明,这个马格努斯力可以表达为体系在远处围绕涡旋中心的动量环量^[41]。利用非线性薛定谔方程,考虑具有一个量子涡旋的凝聚体和其中的准粒子激发,可以直接计算这个环量。由于凝聚体在远处的变化十分缓慢,适合把准粒子作半经典处理;通过其能量和贝里曲率在相空间中的分布,得到准粒子对这个动量环量的贡献^[42]。结果换算成二流体图像表明,这个马格努斯力在有限温度下仍然正比于超流密度,与正常流无关。

光晶格周期势场中,玻色凝聚体也有布洛赫能带结构。相互作用让凝聚体的绝热演化,比如在微弱外力下的布洛赫振荡^[43],成为一个非线性问题。非线性薛定谔方程有个经典力学的类比,前者的能量本征态对应于后者的一个不动点^[44]。

因此,当参数(布洛赫动量)缓慢变化时,本征态的绝热演化是成立的,除非不动点失稳。不动点周围的经典轨道对应于一些非本征态,前者在演化中保持作用量不变,对应于后者一种几何相位的守恒。利用这个方法,在二能带近似下,可以对凝聚体的齐纳隧穿及其非线性反常做出细致分析^[45, 46]。

博戈留波夫准粒子代表的实际上就是凝聚体的微小振动,满足一套正则的但非厄密的运动方

程,可以发生两种意义下的失稳。一种是动力学失稳,像吸引相互作用下发生的那样,振动频率会变虚,微小的密度涨落随时间指数发散。另外一种我们称为朗道失稳,像上述凝聚体流速超临界时有些准粒子能量变负,在外界扰动下可以被持续激发。在冷原子凝聚体的实验中,外界扰动可以被严格控制,我们更关心的是动力学失稳。原子间排斥作用会让凝聚体布洛赫态在能带上半部发生动力学失稳,出现周期倍增等现象^[47]。

Box 3 超导和超流准粒子的贝里曲率

超导体可以用博戈留波夫图像来理解,通过准粒子波函数来统一地描述凝聚体基态和超导能隙上方的激发态。准粒子波函数满足单粒子形式的博戈留波夫方程^[54],

$$\begin{pmatrix} \hat{H}_0 & \Delta \\ \Delta^\dagger & -\hat{H}_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中 $\hat{H}_0$ 代表电子哈密顿量, Δ 代表超导序参量, (U, V) 是准粒子波函数, E 是准粒子能量。在方程(1)中,通过引入虚拟的空穴能带,超导序参量由费米面附近的电子配对,变成了电子能带和空穴能带的耦合。由于空穴能带是电子能带对偶而来,博戈留波夫方程具有电子—空穴冗余性。准粒子波函数直接对应着能隙上方的激发态,同时,对所有负能量准粒子态完全填充的多体波函数也给出了超导基态(图4)。

我们可以利用准粒子波函数构造波包,并且追踪准粒子波包概率中心的运动,得到半经典运动方程^[62]。我们发现,在准粒子波包的半经典运动方程中,展现出贝里曲率的影响。超导准粒子的贝里曲率,既具有电子能带部分的残余,也具有超导序参量的贡献。如果我们只考虑超导序参量所主导的贝里曲率,运动方程可以写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \nabla_k E + \dot{\mathbf{k}} \times (\nabla_k \rho \times \nabla_k \theta) + \nabla_k (\rho \mathbf{v}^s - \mathbf{B} \times \tilde{\mathbf{d}}) \cdot \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla_r (\rho \nabla_k \theta), \\ \dot{\mathbf{k}} = -\nabla_r E + \dot{\mathbf{r}} \times (e\rho \mathbf{B} - \nabla_r \rho \times \mathbf{v}^s + \nabla_r \times (\mathbf{B} \times \tilde{\mathbf{d}})) - \nabla_r (\rho \nabla_k \theta) \cdot \dot{\mathbf{k}} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \nabla_k (\rho \mathbf{v}^s - \mathbf{B} \times \tilde{\mathbf{d}}). \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\rho = |U|^2 - |V|^2$ 是准粒子的有效电荷, θ 是超导序参量 Δ 的相位, $\tilde{\mathbf{d}} = (\rho^2 - 1)\nabla_k \theta$ 是准粒子的电偶极矩, $\mathbf{v}^s = \nabla_r \theta - \mathbf{A}$ 是超流速度。我们可以看到超导序参量的相位 θ 占据了关键的位置,它在动量空间的梯度带来了动量空间贝里曲率,

$$\Omega_k = \nabla_k \rho \times \nabla_k \theta.$$

值得注意的是,此贝里曲率总是集中在电子费米面附近,这是序参量贡献的动量空间贝里曲率的普适性质。对于实空间的贝里曲率:

$$\Omega_r = e\rho \mathbf{B} - \nabla_r \rho \times \mathbf{v}^s + \nabla_r \times (\mathbf{B} \times \tilde{\mathbf{d}}),$$

也存在超导序参量相位的贡献 $\nabla_r \rho \times \nabla_r \theta$,这一项在超导涡旋附近会较为显著。同时,准粒子的有效电荷和电偶极矩也会通过与磁场的耦合,带来实空间贝里曲率。在运动方程中还存在着由位置和动量张成的相空间的贝里曲率。这些各式各样的贝里曲率会在反常霍尔输运和准粒子态密度等物理量中体现出来。

对于超流体来说,由格罗斯—皮塔耶夫斯基方程出发,可以推导出低能元激发满足与超导类似的博戈留波夫方程。对于这些元激发,我们同样可以用博戈留波夫方程的本征波函数构造波包,得到波包的半经典运动方程,并且用其来研究各种贝里相位效应^[42]。

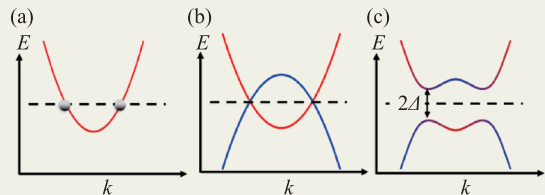


图4 (a)超导体中费米面附近的电子发生库珀配对;(b)在博戈留波夫图像下,通过电子能带的对偶得到冗余的空穴能带;(c)电子与空穴能带通过库珀配对耦合,形成有能隙的准粒子能带

4 超导序参量与准粒子

超导不单是理想导体^[48]，而且还完全抗磁^[49]。金兹堡与朗道借用超流凝聚体的概念作为序参量，建立了一个比较成功的唯象理论^[50]。通过与电磁场的规范耦合，这个理论自然诠释了伦敦兄弟的穿透深度^[51]，而且还给出一个相干长度的概念，并根据两者的相对大小，预言了两类超导体。一类只有一个临界磁场，磁场低了不能进入超导体，高了会进入但让超导状态丧失。二类超导体中，临界磁场变为两个，之间磁场可以进入体内且保持超导，但必须以量子磁通的形式。实验中也确实看到了量子磁通，其单位等于普朗克常数除以两倍电子电荷。

为什么是两倍呢？答案还得从超导的微观机制去找。当时，人们已知超导与电声作用有关，理论上也可以推断声子作为媒介会引起电子之间的某种吸引。库珀考虑了费米面上动量相反的电子对，发现吸引作用会让它们束缚在一起^[52]。这种库珀对的凝聚体由所谓BCS多体波函数描述^[53]，它除了为唯象理论提供了微观基础，还预言了激发谱能隙，并得到实验的进一步确认。

博戈留波夫发现，激发谱里的准粒子跟超流中的声子构成十分相似，是些电子和空穴的叠加^[54]。库珀对提供了一个序参量平均势场，把费米面上下的电子和空穴态耦合了起来，造成费米面处的能隙。BCS最初考虑的是一个自旋和轨道角动量都为零的库珀对，后来发现的铜基高温超导对应于自旋仍然为零但轨道角动量为2的库珀对。后者给出的能隙在费米面上的一些对称线上变为零，那些地方的准粒子更容易被激发。前述普通液氦原子有个同位素³He，少了个中子，整体上表现为一个费米子。在更低的温度下，³He液体也可以发生库珀配对并表现出超流行为。库珀对的自旋和轨道角动量都是1，表现出更为复杂的对称相甚至拓扑行为^[55]。

博戈留波夫准粒子能谱的正能部分代表元激发，而负能部分的完全填充却代表了超导体的BCS基态。在二维手性超导模型中，基态波函数

可以具有非平庸的陈数^[56]。而对于一维无自旋超导模型，基态波函数可以具有量子化的贝里相位^[57]。更一般地，利用博戈留波夫哈密顿量的粒子—空穴对称性，超导系统也可以归入单粒子的拓扑分类中去^[58]。在拓扑奇异的情况下，体边对应导致超导能隙内的边界态模式。其中，零能态模式具有特殊含义，因为它的电子和空穴成分相等，对应一种马约拉纳粒子，其反粒子等于自身^[56, 57]。

由于马约拉纳零能模在量子计算中具有应用潜力，人们在努力寻找和制备拓扑超导材料。受拓扑绝缘体研究的启发，人们考虑通过自旋轨道耦合以及超导近邻效应来实现各种拓扑奇异的超导态^[59, 60]，也发掘了铁基超导体等内禀拓扑超导体^[61]。目前，超导异质结系统和铁基超导系统在实验方面都有显著进展，发现了诸多马约拉纳零能模存在的实验迹象。

库珀对序参量不仅仅决定超导体的拓扑性质，也深深地影响着准粒子的量子几何(Box 3)。序参量可以通过配对对称性和自旋轨道耦合获得丰富的动量依赖，也可以通过超流或者磁通以及外加条件获得空间和时间上的依赖。如果构造准粒子波包，并且追踪波包中心的半经典运动，那么会发现序参量对于动量和位置的依赖会造成准粒子波包在动量位置和时间维度上方方面面的贝里曲率，影响它们在相空间的运动轨迹和态密度^[62]。

参照布洛赫电子的半经典响应理论，我们可以将准粒子波包运动方程和玻尔兹曼方程结合，预言由贝里曲率所带来的丰富的热力学和输运性质，包括局域态密度修正，热霍尔和自旋能斯特等效应。另外，由于准粒子携带的电荷非守恒量，它们的电磁响应和对序参量的反馈作用也是很值得探讨的课题。

5 晶体形变与人工引力

牛顿力学的背后假设了平直的空间和均匀流逝的时间。自由状态就是匀速直线运动，其速度或动量的改变源自外力。完美晶体中，布洛赫粒子的(晶格)动量守恒，因而也做匀速直线运动；粒子动量的改变赖以破坏晶格平移对称的各种因

素,包括本文涉及的非均匀序参量。在广义相对论中,爱因斯坦把引力归结为时空的形变。我们想知道,晶体的形变是不是也可以让布洛赫粒子感受到一种类似于引力的作用呢?

假设晶体的形变发生在比较大的空间和时间尺度上,可以对布洛赫粒子做局部和绝热处理。引入三个晶格矢量场来标注各处元胞的形状大小和朝向,再引入一个速度矢量场来表达元胞的移

动。利用这些晶格矢量场的偏导数,再乘以倒格矢,我们可以得到一个晶格联络,描绘元胞随时间或位置的旋转和应变。这也对应于微分几何里联络的概念,那里的所谓标架就是这里的晶格矢量。在远大于元胞的尺度上空间是连续的,但各处的布里渊区随着元胞的伸缩扭转而起舞波动。

相对于这样一个非均匀变化着的相空间背景,晶格联络可以帮助我们有效地描写布洛赫粒子的

Box 4 形变晶格中的几何动力学

周期晶格导致电子本征波动采取布洛赫波的形式,其(晶格)动量定义在具有环状面(torus)拓扑结构的布里渊区上。对于随位置和时间缓慢变化的晶格,可以采用局部晶格描述,其中描述元胞的晶格矢量 $\{c_a(\mathbf{x}, t)\}$ 和定义布里渊区的倒格矢量 $\{b^a(\mathbf{x}, t)\}$ 都成为矢量场,这里 $a = 1, 2, 3$ 。因此,不同的时空局部有不同的动量空间,不能再由一个统一的布里渊区描述。在这种情况下,如何联系和比较不同时空局部的动量呢?可以引入晶格联络的概念描述晶格矢量场的变化^[63]:

$$\partial_\mu c_a^i = \Gamma_{j\mu}^i c_a^j.$$

这里 i, j 表示矢量的分量,而 $\mu = 0, 1, 2, 3$ 也包括了时间分量($\mu = 0$),重复的上下标意味着缩并求和。晶格联络 $\Gamma_{j\mu}^i$ 类似于微分几何中的第二类克里斯托弗记号,可以借助倒格矢量与晶格矢量之间的正交归一条件而表示为

$$\Gamma_{j\mu}^i = b_j^a \partial_\mu c_a^i = -c_a^i \partial_\mu b_j^a.$$

因此,随时空位置变化 $d\mathbf{x}^\mu$,由于布里渊区的改变所导致的动量纯几何改变等于 $\delta k_i = -\Gamma_{j\mu}^i k_j d\mathbf{x}^\mu$ 。这可直接导致两个重要的概念。第一,将其从晶格场中电子运动总的动量变化 dk_i 中扣除,即得到纯动力学动量改变: $Dk_i = dk_i + \Gamma_{j\mu}^i k_j d\mathbf{x}^\mu$ 。第二,对时空坐标求导可以通过定义所谓晶格协变导数 ∇_{x^μ} ,计入纯几何导致的晶格动量的时空依赖效应 δk_i 。晶格协变导数作用在相空间中任一标量函数 $f(\mathbf{k}; \mathbf{x}, t)$ 的结果是:

$$\nabla_{x^\mu} f(\mathbf{k}; \mathbf{x}, t) = (\partial_{x^\mu} - \Gamma_{j\mu}^i k_j \partial_{k_i}) f(\mathbf{k}; \mathbf{x}, t).$$

因此,如果 f 是 $\mathbf{k}$ 的周期函数则 $\nabla_{x^\mu} f$ 依然是 $\mathbf{k}$ 的周期函数。这一性质使得晶格协变导数成为表述电子半经典动力学的理想语言。

另外,形变晶格的几何也会深刻地影响到量子几何。由于元胞内位置 $\mathbf{r}$ 和晶格动量 $\mathbf{k}$ 在不同的时空局部 $(\mathbf{x}, t)$ 有着不同的定义域,作用在布洛赫波幅上的时空导数也需要一个协变形式^[63]:

$$\nabla_{x^\mu} u(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \mathbf{x}, t) = (\partial_{x^\mu} - \Gamma_{j\mu}^i k_j \partial_{k_i} + \Gamma_{j\mu}^i r^j \partial_{r^i}) u(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \mathbf{x}, t).$$

在此基础上,相空间中贝里曲率涉及到时空分量时都要用到这种协变导数,比如:

$$\Omega_{k, x^\mu} \equiv i \left[\left\langle \partial_{k_i} u \left| \nabla_{x^\mu} u \right\rangle - \left\langle \nabla_{x^\mu} u \left| \partial_{k_i} u \right\rangle \right].$$

在上述几何概念的基础上,通过半经典动力学的一般手续,可以得到包含形变晶格几何和波函数量子几何的电子运动方程^[63]:

$$\begin{aligned} D_t \mathbf{x} &= \partial_{\mathbf{k}} \varepsilon - D_t \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}} - \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}T}, \\ D_t \mathbf{k} &= -\nabla_{\mathbf{x}} \varepsilon - m_e D_t \mathbf{x} \times 2\boldsymbol{\omega} - m_e \mathbf{a}. \end{aligned}$$

其中 $D_t \mathbf{x} \equiv \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{W}$ 和 $D_t \mathbf{k} \equiv D\mathbf{k}/dt$ 是电子相对于晶格的速度和动量变化率, $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t)$ 是晶格速度,而 $\boldsymbol{\omega} \equiv \frac{1}{2} \partial_{\mathbf{x}} \times \mathbf{W}$ 和 $\mathbf{a} = \partial_t \mathbf{W} + (\mathbf{W} \cdot \partial_{\mathbf{x}}) \mathbf{W}$ 是晶格角速度和加速度场。另外,晶格动量的动力学变化来源于梯度力以及晶格转动和平动引起的惯性力。除此之外,晶格几何的效应全部被晶格协变导数吸收,使得贝里曲率进入运动方程的方式与没有形变的情形一致。

运动。比如，当考虑动量改变时，就要顾及到背景布里渊区的变化；利用联络将后者扣除，剩下的才算是动力学意义下的改变。同理，当考虑空间梯度时，也要顾及到背景的变化，作出相应的修改。这种协变梯度作用到粒子能量上就等于应变梯度乘以形变势，一个形变电子学中常常用到的基本概念。对贝里曲率做同样的协变处理，凡是涉及到其时间或位置分量的地方，都可以代之以应变分量再乘以相应的应变速率或梯度。

这样，布洛赫粒子相对于相空间背景的运动方程就保持以前的形式^[63]，只是在动量变化的方程里多了个正比于元胞加速度的惯性力和正比于元胞角速度的科里奥利力(Box 4)。这两个力当然是非惯性系的结果，在牛顿力学里我们就已经熟悉。有意思的是，晶体形变的效应完全用联络以协变的方式隐含了起来，类似于广义相对论对于时空形变效应的描述。这大大方便了我们思考和计算形变引起的各种物理效应，比如晶体应变梯度引起的电极化，应变速率引起的轨道磁化和应力(霍尔粘滞)等等。这些效应都密切依赖于动量和应变参数空间里的贝里曲率等量子几何量。

为了与广义相对论做出更为贴切的类比，可以考虑时空晶体——在空间和时间上都周期变化的体系。文献中常常利用电磁波对晶体的驱动再来获得一个时间周期，声波驱动也可以达到类似的效果，但后者的波长效应不可忽略，其时空晶体中原来的3维晶格矢量还要往时间方向偏转一些。在时空晶体里，波动方程(不限定在薛定谔方程，也可以是麦克斯韦等经典方程)的本征模式是所谓弗洛凯—布洛赫波，在平面波上有个时空周期的幅度调制。波动的频率和波矢对应于一个四维(晶格)能动矢量，定义在一个周期循环的四维布里渊区上^[64]。

为了把时间和位置放在同等地位，并充分借助关于布洛赫粒子的那套逻辑和方法，我们把波动看成时空上的一个场，让它像薛定谔方程那样随某个参数发展^[65, 66]。其定态本征值作为能动量的函数，在四维布里渊区形成一系列谱带；本征值为零即回归到原来波动方程的解，也同时定出一系列能动量关系。聚焦在一个谱带里，在某点附近叠加出一个波包，同时具有相对确定的能动

量和时空位置，就代表一个粒子事件。波包中心随参数发展的动力学方程，即构成8维相空间中粒子世界线的一个几何描述^[65]。

在完美的时空晶体中，粒子的能动量守恒，世界线依然是一条直线。如果时空晶体本身发生形变，比如那些晶格矢量获得了某种缓慢的时空位置依赖，情况又如何呢？仿照上面的做法，可以定义出一套四维的晶格联络来表达元胞的时空应变梯度。我们会得到像上述布洛赫粒子那样一套广义协变的运动方程，而且其形式更为对称简洁；因为相空间增加了时间和能量两个维度，惯性力和科里奥利力也被隐藏了起来。由于形变势(上述本征值对于元胞时空应变的微商)和贝里曲率的存在，仅仅用联络描绘自由漂移的测地线方程不再成立^[66]。

6 总结与展望

本文介绍了凝聚态中几种典型的对称破缺状态，包括晶体、磁序、超流、超导系统。其中，电子起到不可或缺的作用，可以说是深度参与。在超流问题中，电子被锁定在原子内部的量子基态，但通过其量子涨落和量子统计效应提供原子间的远程吸引力和近程排斥力。在晶体中，原子外层电子会发生剧烈的状态重组，以布洛赫波的形式参与到晶体的结合。磁性材料中，磁矩主要来源于稀土或过渡元素中未填满的内壳层电子，它们在晶体中发生铁磁或反铁磁耦合。在超导材料中，金属费米面上的电子由于某种相互吸引而配对，在费米动量处产生能隙。

我们也简单描绘了这些对称破缺状态中的集体行为，其中电子也是深度参与。一般来说，结构和序参量的运动比较缓慢，可以把电子状态做绝热处理。一方面，电子能量贡献了原子位形和序参量空间的一个势能。另一方面，电子基态的贝里相位贡献了这个空间里类似于矢量势的一个规范场，近年来开始受到密切关注。磁序参量空间中的贝里曲率是磁旋比系数的微观表达，代表磁动力学中的一个广义洛伦兹力。原子位形空间的分子贝里曲率把电子系统的时间反演破缺传递到了晶格动力学中，是声磁耦合的一个主要渠道。

原子位形和磁序参量之间的贝里曲率在声磁联合动力学问题中,比如声子和磁振子的耦合方程里,也至关重要^[67]。

电子在这些集体运动中也有非绝热、非被动角色。比如,磁性金属费米面附近的电子会在磁运动中被激发,造成吉尔伯特阻尼。我们还可以操控这些传导电子,来积极影响集体运动,比如通过自旋流对磁体施加力矩。我们还发现,存在一种非保守、非耗散的手段,源自序参量和时间之间的贝里曲率,在集体运动中做功。相对于自由能对序参量的梯度给出的广义保守力,称这种贝里曲率为广义法拉第力,类似于电磁学里的感生电动势;对应于上述广义洛伦兹力,它也是一种广义规范力。

结构和序参量的微小振动对于对称破缺状态具有普遍意义,其量子化表现统称为戈德斯通玻色子,包括晶体中的声子、磁体中的磁振子、超流中的准粒子等等。声子的激发是固体热容量的主要来源,其量子统计在低温下表现突出。磁振子的热激发研究让人们认识到了戈德斯通玻色子对序参量的减弱甚至破坏作用。朗道利用超流准粒子的量子属性,加上能动量守恒原理,解释了为何相对超流低速运动的物体不会引起它们的激发。近年来,热霍尔效应的研究揭示了固体中声子和磁振子也具有电子那样的拓扑几何特性。

超导中的博戈留波夫准粒子不属于这个范畴,它们代表的更像是一种序参量作用下电子状态的重组,只是把空穴状态也叠加了上去,仍然遵从

费米—狄拉克统计。这些电子—空穴态当然也深度参与超导序参量的建立,以一种自洽的形式决定了超导能隙的大小和相对相位,及其在动量空间的分布等等。由于和电磁规范场的耦合,超导序参量的微小振动更像是金属中的等离子激发,也具有能隙。这也是著名的安德森—希格斯机制的最初模型,因为这种耦合也让电磁规范场获得质量,不能进入超导体内部。

我们也关心序参量在空间大范围的结构和运动,比如铁磁畴壁和斯格明子,以及超流中的量子涡旋和超导中的量子磁通等等。这些拓扑结构在移动中受到的马格努斯力也具有量子几何背景。如果序参量随空间变化缓慢,其与电子体系的耦合可以进一步利用布洛赫粒子的半经典响应理论来描述;这个方法已经在磁性和超导研究中有很多应用。另外,非均匀序参量中的准粒子激发也是一个重要的课题,例如,超流量子涡旋与正常流的相互作用就需要这方面的知识。

对于晶体的大尺度形变与电子系统的耦合,我们也可以在绝热和局部近似下考虑。需要引入一个晶格联络来描述周期性随时间和位置的变化;用其修改过的动量微分和时空梯度也更本质,可以简洁地表达布洛赫电子的物理量和运动方程。我们发现,对于形变和电子系统的耦合响应,在动量和应变参数空间上的贝里曲率起到至关重要的作用。晶格联络也可以扩展应用到弯曲的时空晶体问题上,以广义协变的形式描绘粒子在时空和能动量空间里的轨迹。

参考文献

- [1] 冯端,金国均.凝聚态物理学.北京:高等教育出版社,2013
- [2] Anderson P W. Basic Notions of Condensed Matter Physics. CRC Press, 2019
- [3] Sundaram G, Niu Q. Phys. Rev. B, 1999, 59: 14915
- [4] Xiao D, Chang M C, Niu Q. Rev. Mod. Phys., 2010, 82: 1959
- [5] 黄昆. 固体物理学. 北京: 高等教育出版社, 1966
- [6] Kittel C. Introduction to Solid State Physics. Wiley, 2018
- [7] Zhang L, Niu Q. Phys. Rev. Lett., 2015, 115: 115502
- [8] Zhang L, Ren J, Wang J S *et al.* Phys. Rev. Lett., 2010, 105: 225901
- [9] Qin T, Zhou J, Shi J. Phys. Rev. B, 2012, 86: 104305
- [10] Zhang L, Niu Q. Phys. Rev. Lett., 2014, 112: 085503
- [11] Tauchert S R, Volkov M, Ehberger D *et al.* Nature, 2022, 602: 73
- [12] Cheng B, Schumann T, Wang Y *et al.* Nano Lett., 2020, 20: 5991
- [13] Ren Y, Xiao C, Saparov D *et al.* Phys. Rev. Lett., 2021, 127: 186403
- [14] Saparov D, Xiong B, Ren Y *et al.* Phys. Rev. B, 2022, 105: 064303
- [15] Born M, Huang K. Dynamical Theory of Crystal Lattices. Oxford University Press, 1996
- [16] Mead C A, Truhlar D G. J. Chem. Phys., 1979, 70: 2284
- [17] Heisenberg W. Z. Phys., 1928, 49: 619
- [18] Bloch F. Z. Phys., 1929, 57: 545
- [19] Landau L D, Lifshitz E. Phys. Z. Sowjet., 1935, 8: 153
- [20] Gilbert T L. Phys. Rev., 1955, 100: 1243
- [21] Niu Q, Kleinman L. Phys. Rev. Lett., 1998, 80: 2205

- [22] Niu Q, Wang X, Kleinman L *et al.* Phys. Rev. Lett., 1999, 83: 207
- [23] Xiong B, Chen H, Li X *et al.* Phys. Rev. B, 2018, 98:035123
- [24] Cheng R, Niu Q. Phys. Rev. B, 2013, 88:24422
- [25] Xiao C, Xiong B, Niu Q. Phys. Rev. B, 2021, 104:064433
- [26] Tang J, Cheng R. Phys. Rev. Lett., 2024, 132:136701
- [27] Bylander D M *et al.* Phys. Rev. B, 2000, 61:R11875
- [28] Yu Y, Niu Q. 2000, arXiv: cond-mat/0003293
- [29] Cheng R, Niu Q. Phys. Rev. B, 2014, 89:81105
- [30] Cheng R, Niu Q. Phys. Rev. B, 2012, 86:245118
- [31] Lin Y, Feng J. 2024, arXiv: 2402.05473
- [32] Griffin A *et al.* Bose-Einstein Condensation. Cambridge: Cambridge University Press, 1996
- [33] Anderson M H *et al.* Science, 1995, 269:198
- [34] Davis K B *et al.* Phys. Rev. Lett., 1995, 75:3969
- [35] Gross E P. Nuovo Cim, 1961, 20:454
- [36] Pitaevskii P P. JETP, 1961, 13:451
- [37] Bogoliubov N N. J. Phys. (USSR), 1947, 11:23
- [38] Feynman R P. Phys. Rev., 1954, 94:262
- [39] Ao P, Thouless D J. Phys. Rev. Lett., 1993, 70:2158
- [40] Tisza L. Nature, 1938, 141:913
- [41] Thouless D J, Ao P, Niu Q. Phys. Rev. Lett., 1996, 76:3758
- [42] Zhang C *et al.* Phys. Rev. Lett., 2006, 97:040401
- [43] Choi D I, Niu Q. Phys. Rev. Lett., 1999, 82:2022
- [44] Liu J, Wu B, Niu Q. Phys. Rev. Lett., 2003, 90:170404
- [45] Wu B, Niu Q. Phys. Rev. A, 2000, 61:023402
- [46] Wu B, Niu Q. New J. Phys., 2003, 5:104
- [47] Wu B, Niu Q. Phys. Rev. A, 2001, 64:061603
- [48] Onnes H K. Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden, 1911, No. 120b; No. 122b; No. 124c
- [49] Meissner W, Ochsenfeld R. Naturwissenschaften, 1933, 21:787
- [50] Landau L D, Ginzburg V L. Zh. Eksp. Teor. Fiz., 1950, 20:1064
- [51] London F, London H. Proc. R. Soc. Lond. A, 1935, 149:71
- [52] Cooper L N. Phys. Rev., 1956, 104:1189
- [53] Bardeen J *et al.* Phys. Rev., 1957, 108:1175
- [54] Bogoliubov N N. Sov. Phys. JETP, 1958, 7:41
- [55] Volovik G E. The Universe in a Helium Droplet. Oxford University Press, 2009
- [56] Read N, Green D. Phys. Rev. B, 2000, 61:10267
- [57] Kitaev A Y. Phys.-Usp., 2001, 44:131
- [58] Schnyder A P *et al.* Phys. Rev. B, 2008, 78:195125
- [59] Fu L, Kane C L. Phys. Rev. Lett., 2008, 100:096407
- [60] Flensberg K *et al.* Nat. Rev. Mater., 2021, 6:944
- [61] Kong L Y, Ding H. Acta Phys. Sin., 2020, 69:110301
- [62] Wang Z *et al.* Phys. Rev. Lett., 2021, 126:187001
- [63] Dong L, Niu Q. Phys. Rev. B, 2018, 98:115162
- [64] Gao Q, Niu Q. Phys. Rev. B, 2022, 106:224311
- [65] Dong L. Geometrodynamics in crystals with space-time periodicity and deformation. PhD Thesis, The University of Texas at Austin, 2021
- [66] Li A, Dong L, Niu Q. 2023, arXiv: 2310.16918
- [67] Bonini J *et al.* Phys. Rev. Lett., 2023, 130:086701

读者和编者

订阅《物理》得好礼

——超值回馈《岁月留痕》
——<物理>四十年集萃

为答谢广大读者长期以来的关爱和支持，《物理》编辑

户名：中国科学院物理研究所
帐号：11 250 1010 4000 5699
(请注明《物理》编辑部)
咨询电话：010-82649029；82649277
Email: physics@iphy.ac.cn

部特推出优惠订阅活动：向编辑部连续订阅2年《物理》杂志，将获赠物理类科普图书或《岁月留痕——<物理>四十年集萃》一本。该书收录了1972年到2012年《物理》发表的40篇文章，476页精美印刷，定价68元，值得收藏。

希望读者们爱上《物理》！

订阅方式(编辑部直接订阅优惠价180元/年)

(1) 邮局汇款

收款人地址：北京市中关村南三街8号中科院物理所，100190

收款人姓名：《物理》编辑部

(2) 银行汇款

开户行：农行北京科院南路支行

