

# 约当——被无视的量子力学与量子场论奠基人

曹则贤<sup>†</sup>

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

2024-08-29 收到

<sup>†</sup> email: zxcao@iphy.ac.cn

DOI: 10.7693/wl20241005

CSTR: 32040.14.wl20241005

颠倒英雄古来有  
——[唐]戴叔伦《行路难》

**摘要** 约当是量子力学奠基人之一，是量子场论的奠基人，量子生物学也是他的主意。约当在量子力学建立过程中使用的数学最终导致了约旦代数这个数学分支的诞生。约当是早慧的天才，又得到诸多科学巨擘的加持，其对物理学的贡献给人一种信手拈来的感觉。令人不解的是，约当对科学的贡献遭到了有意无意的忽视。约当被誉为无人提及的量子力学英雄(der unbesungene Helden der Quantenmechanik)，量子力学与量子场论被不公正地几乎遗忘的共同构建者(zu Unrecht fast vergessenen Mitbegründer der Quantenmechanik und der Quantenfeldtheorie)，这样的命运令人不胜唏嘘。

**关键词** 矩阵力学，变换理论，对易关系，反对易关系，费米—狄拉克统计，量子场论，量子生物学，约当代数

## 0 哥廷恩，1924

哥廷恩是德国中北部的一个有着传奇色彩的小镇。有个叫施罗茨(August Ludwig von Schlözer, 1735—1809)的人曾用“Extra Gottingam non est vita, si est vita non est ita”来赞美这个小镇，意思是“哥廷恩之外没有生活；如果有生活，那也跟这儿不一样”。哥廷恩确实有其独特的地方，比如它有一所真大学。上世纪初二十年代的哥廷恩大学活跃着几位被称为 die Bronzen(大咖)的数学家，包括希尔伯特、克莱因、闵可夫斯基、龙格(Carl Runge, 1856—1927)以及福格特(Woldmar Voigt, 1850—1919)。熟悉数学的朋友都知道希尔伯特、克莱因、闵可夫斯基被称为数学三驾马车，有传奇无数。笔者不通数学，恕不多言。这几位的物理成就值得略提一下，希尔伯特发展的一些数学理论是量子力学的基础(希尔伯特空间是量子力学的基础)且本人率先给出了引力场方程，闵可夫斯基的名字见于闵可夫斯基空间，克莱因与索末菲

合著有《陀螺理论》。龙格在物理方面的兴趣包括光谱学与天体物理，他的三个博士之一是提出量子力学的玻恩，而福格特是那个提出洛伦兹变换的人，且是个晶体学大家。

1924年，署名希尔伯特与库朗(Richard Courant, 1888—1972)的《数学物理方法 I》(*Methoden der mathematischen Physik I*, Springer, 1924)出版。该书1930年出版了第二版；后继的《数学物理方法 II》则迟至1937年才出版。接下来提及的库朗的“数学物理方法”都是指《数学物理方法 I》。这本书的内容多来自希尔伯特的文稿与讲稿，但撰写由库朗负全责(...muss ich die Verantwortung allein übernehmen 库朗撰写的作者序)。库朗那段时间有个青年助手(时值21—22岁)参与了这本书的写作过程。这个助手对这本书有什么具体的贡献，不好说，但是有一点是肯定的，这个青年对这本书的内容是非常精通的。他的名字出现在作者的致谢名单中。

1924年6月13日，哥廷恩年轻一辈的物理教授玻恩提交了一篇名为 Über Quantenmechanik 的

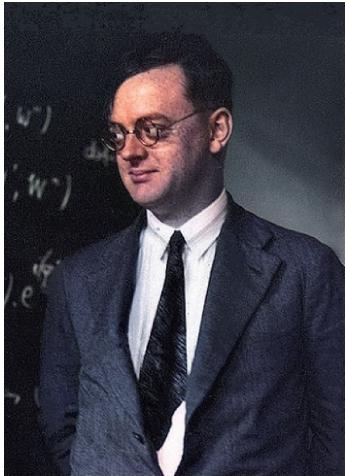


图1 1920年的约当

论文，这标志着量子力学的诞生。此时，以及接下来玻恩创立矩阵力学以及应用波动力学的日子里，这个青年是玻恩教授的助手。

这个青年叫约当(Pascual Jordan, 1902—1980)，他是在那一年在玻恩门下获得的物理学博士学位(图1)。

《数学物理方法 I》是那一年诞生的量子力学的数学基础(注意，那个帮助薛定谔解了氢原子的薛定谔方程的外尔也出身哥廷恩，是希尔伯特的博士生)。此处我把该书中几章的名字译出来，大家看看是不是似曾相识。

第一章 Die Algebra der linearen Transformationen und quadratischen Form (线性变换与二次型的代数)

第五章 Die Schwingungs-und Eigenwertprobleme der mathematischen Physik (数学物理中的振动问题与本征值问题)

第六章 Anwendung der Variationsrechnung auf die Eigenwertprobleme (变分在本征值问题上的应用)

第七章 Spezielle durch Eigenwertprobleme definierte Funktionen (本征值问题定义的特殊函数)

特别地，第一章的第5节就有矩阵的基本因子以及酉阵谱方面的内容。这本书出现的第二年，这些内容就有了物理对应。我觉得，科学史家忽略了《数学物理方法 I》对量子力学诞生的意义：没有希尔伯特、库朗的《数学物理方法 I》就没有量子力学。玻恩/约当，薛定谔/外尔，泡利，冯·

诺伊曼，这些人在构筑量子力学和撰写量子力学著作时都提及了这本书。

在《数学物理方法 I》这本书中，矩阵一词，Matrix (复数 Matrizen)共出现 46 次。英文版中更多，因为它把一些 Tensor 也给翻译成了 matrix。那个时代，很多数学物理教授都没听说过矩阵的概念。在哥廷恩的玻恩和约当熟读这本书，所以玻恩在提出量子力学的概念后与约当一起构造了矩阵力学，而后还能应用于诠释薛定谔的波动力学；约当参与构造了矩阵力学(特别地是给出矩阵力学的概率诠释以及得到黑体辐射涨落的矩阵力学推导)，还自己给出了量子力学的变换理论形式。薛定谔也是熟读这本书的，不信你比较这本书第六章与薛定谔 1926 年的论文。我忽然想到，任何一个在开始学习量子力学之前熟读过这本书的人，应该都不会如笔者当初学习量子力学时那么手足无措。

笔者斗胆说，量子力学及其诠释不可能先出现在哥廷恩以外的任何地方。Extra Gottingam non est mechanica quantica, si est mechanica quantica non est ita. 或者，换个表述，Extra Gottingam non est Quantenmechanik, si est Quantenmechanik non est ita.

听老农口口相传，树木、花草和庄稼要想长得好，前提是要有一片沃土。

## 1 约当简介

约当 1902 年出生于德国汉诺威的一个源自西班牙的贵族之家，这个家族每一代的长子必须叫 Pascual。Pascual Jordan 早慧且自幼就受到了良好的教育，12 岁就试图调和圣经与达尔文的进化论。1921 年，约当进入汉诺威大学学习动物学、数学和物理，1923 年转入哥廷恩大学，作为数学家柯朗的助手，同时在物理学家玻恩和遗传学家 Alfred Kühn 的指导下做博士论文{德国大学制度，三年或四年可获博士学位，学位要在两所大学完成，要有主专业和副专业。副专业在博士答辩后的考试阶段会被特别关注。阅读那时候德国科学家传记时请注意这一点}。1924 年，约当在玻恩

门下获得物理学博士学位。此时，约当已经完成了从学生到研究者的身份转换，更重要的是，他获得了一般天才人物所不具备的数学、理论物理、实验物理和生物学知识(参阅他接下来几年参与完成的几本著作)。1927年，约当通过了Habilitation{解释见此系列之前的文章}有了任讲师的资格，然后到哥本哈根玻尔处待了半年。约当曾在罗斯托克大学、洪堡大学任教授，二次世界大战后经泡利推荐在汉堡大学谋得一个客座教授差事，1953年才转为正式教授直到退休。

约当对物理学的贡献是卓越的。约当曾于1942年获得普朗克奖，1955年获得高斯奖，算是他的国家对其物理学、数学成就的肯定。约当是个被忽视的英雄，但他对建立量子力学和量子统计所做的贡献，至少应该为欲掌握这些学问的学者所熟知。

## 2 约当的量子力学论文与著作

谈论量子力学奠基者对建立量子力学的贡献，应基于其本人发表的原始文献进行，需要关注的是文章的内容以及发表时间(宜与其他相关文献的投稿或发表时间相对照)。约当在建立量子论、量子力学和量子场论方面发表的文章(不完全)罗列如下：

(1) P. Jordan, Zur Theorie der Quantenstrahlung (量子辐射理论), *Zeitschrift für Physik* **30**, 297—319 (1924).

(2) P. Jordan, Über das thermische Gleichgewicht zwischen Quantenatomen und Hohlraumstrahlung (论量子原子与空腔辐射之间的热平衡), *Zeitschrift für Physik* **33**, 649—655 (1925).

(3) P. Jordan, Bemerkungen zur Theorie der Atomstruktur (关于原子结构理论的几点说明), *Zeitschrift für Physik* **33**, 563—570 (1925).

(4) M. Born, P. Jordan, Zur Quantenmechanik (走向量子力学), *Zeitschrift für Physik* **34** (1), 858—888 (1925).

(5) M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan, Zur Quantenmechanik II (走向量子力学 II), *Zeitschrift*

*für Physik* **35** (8-9), 557—615 (1926).

(6) P. Jordan, Über kanonische Transformationen in der Quantenmechanik (量子力学中的正则变换), *Zeitschrift für Physik* **37**, 383—386 (1926).

(7) P. Jordan, Über kanonische Transformationen in der Quantenmechanik II (量子力学中的正则变换 II), *Zeitschrift für Physik* **38**, 513—517 (1926).

(8) P. Jordan, Über eine neue Begründung der Quantenmechanik (论量子力学的新筑基), *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, 161—169 (1926). {neue Begründung 同时作新基础、重新筑基理解更好些}

(9) P. Jordan, Über quantenmechanische Darstellung von Quantensprüngen (论量子跃迁的量子力学表述), *Zeitschrift für Physik* **40** (9), 661—666 (1927).

(10) P. Jordan, Über eine neue Begründung der Quantenmechanik (论量子力学的新筑基), *Zeitschrift für Physik* **40** (11-12), 809—838 (1927).

(11) P. Jordan, Über eine neue Begründung der Quantenmechanik II (论量子力学的新筑基 II), *Zeitschrift für Physik* **44** (1-2), 1—25 (1927).

(12) P. Jordan, Zur Quantenmechanik der Gasentartung (气体退化的量子力学), *Zeitschrift für Physik* **44**, 473—480 (1927). {Entartung, 一般译为简并}

(13) P. Jordan, Kausalität und Statistik in der modernen Physik (近代物理中的因果律与统计), *Die Naturwissenschaften* **15** (5), 105—110 (1927).

(14) W. Heisenberg, P. Jordan, Anwendung der Quantenmechanik auf das problem des Zeeman-Effekts (量子力学在塞曼效应问题上的应用), *Zeitschrift für Physik* **37**, 263—277 (1927).

(15) P. Jordan, Anmerkung zur statistischen Deutung der Quantenmechanik (关于量子力学之统计诠释的注解), *Zeitschrift für Physik* **41** (4—5), 797—800 (1927).

(16) P. Jordan, Über Wellen und Korpuskeln in der Quantenmechanik (量子力学中的波与粒子), *Zeitschrift für Physik* **45**, 766—775 (1927).

- (17) P. Jordan, O. Klein, Zum Mehrkörperproblem der Quantentheorie (量子论中的多体问题), *Zeitschrift für Physik* **45**, 751—765 (1927).
- (18) P. Jordan, Die Entwicklung der neuen Quantenmechanik (新量子力学的发展), *Naturwissenschaften* **15**, 636—649 (1927).
- (19) W. Pauli, P. Jordan, Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder (论无荷场的量子电动力学), *Zeitschrift für Physik* **47**, 151—173 (1928).
- (20) P. Jordan, E. Wigner, Über das Paulische Äquivalenzverbot (论泡利的等价禁制), *Zeitschrift für Physik* **47**, 631—651 (1928).
- (21) P. Jordan, The present state of quantum electrodynamics, *Physikalische Zeitschrift* XXX, 700—712 (1929).
- (22) P. Jordan, Über die Multiplikation quantenmechanischer Größen I (论量子力学量的乘法 I), *Zeitschrift für Physik* **80**, 285—291 (1933).
- (23) P. Jordan, Über die Multiplikation quantenmechanischer Größen II (论量子力学量的乘法 II), *Zeitschrift für Physik* **87**, 505—512 (1934).
- (24) P. Jordan, J. von Neumann, E. Wigner, On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism, *Annals of Mathematics* **35** (1), 29—64 (1934).
- (25) P. Jordan, Die Neutrinotheorie des Lichtes (光的中微子理论), *Zeitschrift für Physik* **93**, 464—472 (1935).
- (26) P. Jordan, Der Zusammenhang der symmetrischen und linearen Gruppen und das Mehrkörperproblem (对称群/线性群与多体问题之间的关系), *Zeitschrift für Physik* **94**, 531—535 (1935).
- (27) P. Jordan, Zur Quantenelektrodynamik I, *Zeitschrift für Physik* **95**, 202—203 (1935). {在这个杂志的网站上, 这篇论文被遗漏了, 前面一篇是 198—201, 后面一篇 204—209。原因不明}
- (28) P. Jordan, Zur Quantenelektrodynamik II, Über die Theorie der Paarerzeugung (量子电动力学 II: 对产生理论), *Zeitschrift für Physik* **96**, 163—166 (1935).
- (29) P. Jordan, Zur Quantenelektrodynamik III. Eichinvariante Quantelung und Diracsche Magnetpole (量子电动力学 III: 规范不变量子化与狄拉克磁单极), *Zeitschrift für Physik* **97**, 535—537 (1935).
- 除了杂志论文以外, 约当关于量子力学还有不少专著。如前所述, 约当作为库朗的助手对希尔伯特、库朗 1924 年的经典《数学物理方法 I》有所参与, 具体贡献不明。两年以后, 约当参与撰写的 J. Franck, P. Jordan, *Anregung von Quantensprüngen durch Stöße* (量子跃迁的碰撞激发), Springer (1926) 出版。注意, 此书的第一作者 James Franck 可是实验物理大拿, 是玻恩就教授职一定要捆绑到一起的好哥们, 此人于 1925 年获诺贝尔物理奖。约当同玻恩一起发展出了矩阵力学形式, 1930 年就合作出版了 434 页的 Max Born, Pascual Jordan, *Elementare Quantenmechanik* (基础量子力学), Springer (1930). 这是矩阵力学的经典, 感觉矩阵力学难学的朋友可以试试这本书, 因为它会给你把矩阵和矩阵力学讲透。这本书, 应该是大部出自约当之手(参照玻恩后来与 Wolff 合写《光学原理》, 与黄昆合写《晶格动力学理论》的轶事可知)。仅仅三年后, 约当独立出版了 Pascual Jordan, *Statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage* (量子论基础上的统计力学), Vieweg (1933) 一书; 六年后, 出版了 Pascual Jordan, *Anschauliche Quantentheorie—Eine Einführung in die Moderne Auffassung der Quantenerscheinungen* (直观量子论—量子现象当代表述导论), Springer (1936) 一书。这不是后世人胡编乱凑的那种量子力学教科书, 而是作者本人作为奠基人的该门学问的源头活水。后来, 约当还出版了 *Die Physik des 20. Jahrhunderts* (二十世纪物理学), Vieweg & Sohn (1936); *Das Bild der modernen Physik* (近代物理图像), Stromverlag (1947); *Schwerkraft und Weltall* (引力与宇宙), Vieweg (1952); *Neuauflagen unter Atom und Weltall: Einführung in den Gedankeninhalt der modernen Physik* (原子与宇宙之下的新支撑: 近代物理思想内容绍介), Vieweg (1956); *Die weltanschauliche Bedeutung der modernen Physik* (近代物理的世界观意

义), Klinger Verlag (1971), 都是可见约当之物理学成就与功底的经典之作。

### 3 约当对量子理论建立的贡献

约当出道伊始, 就基于其学位论文发表了两篇关于黑体辐射的研究论文。黑体辐射研究是量子论的主题之一。接下来, 约当迅速迎来了导师玻恩交给的一个大任务: 发展矩阵力学。

在海森堡划时代的把色散关系转化为量子化形式的思想基础上(这篇文章是海森堡起草了一个草稿, 玻恩完成的), 玻恩认识到这是一个需要用矩阵语言的理论。玻恩先是找数学功底极好的前助手泡利帮忙, 但被拒绝了, 泡利甚至觉得玻恩的数学倾向的计划会窒息海森堡的强大物理直觉(Born's more mathematically inclined program could stifle Heisenberg's powerful physical intuition)。这事儿要是发生在别人身上还好说, 泡利一直就是物理学家里数学高人且是擅长用数学做物理研究的。这不应是泡利的学术立场, 或许出自其他考量。于是, 任务落到了刚毕业的约当的肩上。玻恩觉得海森堡的色散关系与矩阵有关, 约当用了几天时间证实了玻恩的这个猜想是对的。玻恩和约当一起忙活了两个月, 完成了标志量子力学诞生的 Born, Jordan, Zur Quantenmechanik (走向量子力学)一文。矩阵力学的初创内容就在这一篇里。1926年, 又完成了 Born, Heisenberg, Jordan, Zur Quantenmechanik II (走向量子力学 II)一文, 即著名的三人论文, 是把前一篇两人工作的理论扩展到了多自由度情形。在这篇文章中, 约当得到了黑体辐射涨落的矩阵力学推导, 恰是对其学位论文工作的延续。注意, 前一篇两人文章并没有“I”的标识, 可能玻恩当时并没意识到要写续篇。矩阵力学的核心是非对易关系,  $pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$ 。玻恩发现  $pq - qp$  的对角元是  $h/2\pi i$ , 约当从运动方程出发证明了那些非对角项为0。因为这个工作, 泡利曾调侃约当的名字应是“pq-qp Jordan”。玻恩和约当把  $pq - qp = \frac{h}{2\pi i} \mathbf{1}$  称为 verschärzte Quantenbedingung (锐化的量子条件)。猜测是相

对于  $\oint pdq = nh$  而言的)。后来, 即 1927 年, 海森堡的由  $pq - qp = \frac{h}{2\pi i} \mathbf{1}$  得到的 Unschärferelation  $\Delta x \Delta p \geq h/2$ , 概念源头上即来自于此, 更远一点的话可追溯到光谱学记号  $s, p, d, f \dots$ , 这里的  $s$  就取自 scharf (锐)。Unschärferelation 后来都笼统地归于 uncertainty principle (不确定性原理)。英文的 uncertainty 对应的是海森堡原文中三个“稀里糊涂”概念之一的 Unbestimmtkeit (不确定), 其他两个是 Ungenauigkeit (不精确), Unsicherheit (拿不准)。

谈论玻恩和约当对 Zur Quantenmechanik (走向量子力学)一文各自的贡献不是个好的话题。此处仅说说一个小细节。这篇构造矩阵力学的文章包含如下内容: (1) 把海森堡的符号乘积诠释为矩阵乘积; (2) 得到公式  $pq - qp = \frac{h}{2\pi i} \mathbf{1}$ ; (3) 在计算  $pq - qp$  的时间导数的基础上证明了这个公式; (4) 证明能量守恒; (5) 证明玻尔的频率条件; (6) 电磁场量子化, 其中将电磁场分量作为矩阵处理; (7) 在这个量子化的基础.上证实海森堡的假设, 即表示原子电偶极矩的矩阵元的平方对应跃迁概率。前两条是玻恩的工作, 后五条由约当完成。

认真的量子力学表述者会认识到, 许多量子力学文献中的  $pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$  的简化表述是不合适的, 为此会写成  $pq - qp = \frac{h}{2\pi i} \mathbf{1}$  或者  $pq - qp = \frac{h}{2\pi i} \mathbf{I}$ , 强调这里是个矩阵关系表达式, 右边还有个单位矩阵。然而, 必须指出, 这样的表达还缺失了很多内容, 包括为了写起来简单两侧都约去了振荡因子  $e^{i2\pi\nu_{nm}}$ , 而且这里的矩阵须是无穷维矩阵, 且指标必须从 0 开始(因为来自傅里叶分析)。

由  $pq - qp = \frac{h}{2\pi i} \mathbf{1}$ , 加上矩阵算法  $[q^n, p] = [q, p]q^{n-1} + q[q, p]q^{n-2} + \dots$ , 因此这意味着  $p \rightarrow ih\partial_q$ 。这是波动力学要用到的最关键的关系式,  $p \rightarrow ih\partial$ , 是约当于 1925 年及时提出来的(笔者记得见到过这个说法, 但此刻却找不到这个原始出处了)。没有这个关系式, 哪有 1926 年薛定谔的方程用于氢原子问题, 即把一个含  $\frac{p^2}{2m}$  项形

so können alle aus  $\Theta_r$ ,  $N_r$  durch Multiplikationen und Additionen herstellbaren Größen  $\beta_r$  in die Form

$$\beta_r = a_0 + a_1 \xi_r + a_2 \eta_r + a_3 \zeta_r \quad (9)$$

mit reellen  $c$ -Zahlen  $a_0, \dots, a_3$  gebracht werden.

Die Größen

$$k_1 = i\xi_r, \quad k_2 = i\eta_r, \quad k_3 = i\zeta_r \quad (10)$$

verhalten sich in ihrer Multiplikation wie Quaternionen.

Die Bedeutung der Operatoren  $N_r$ ,  $\Theta_r$  wird dabei nach II bestimmt durch die Matrizen

$$\begin{aligned} \xi_r &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ N_r &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Theta_r = \frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

Also erhalten wir (16) symbolisch in der Form

$$\left( \sum_{rs} H_{rs} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_s \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_s + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0. \quad (18)$$

图2 约当Zur Quantenmechanik der Gasentartung一文pp.474—475上的截图

Auf Grund von

$$\begin{aligned} a_a^\dagger(\beta') a_a(\beta') + a_a(\beta') a_a^\dagger(\beta') &= 1 \quad (47) \\ \text{gilt wegen} \quad [a_a(\beta')]^2 &= 0 \end{aligned}$$

图3 约当与维格纳1928年论文p.641上的截图

式的方程转化成一个具体的二阶微分方程(有说法认为薛定谔得到动量算符表达是基于Hamilton—Jacobi理论)?

在Zur Quantenmechanik的两篇文章中, 约当已经提出场量应如量子量(Quantengröße)一样要遵循非对易关系。在人们还半信半疑之时, 约当已经在1927, 1928年同Oscar Klein, Eugen Wigner, Wolfgang Pauli合作了系列文章, 以场概念(Feldbegriff)代替粒子概念(Teilchenbegriff)作为基础对象对待。粒子可以被产生和湮灭, 场量子也可以被产生和湮灭, 这样就消解了波粒二象性。约当认为, 量子地处理波的运动, 类粒子行为就出现了(particle-like properties arise as a consequence of treating wave-motions quantum-mechanically)。约当在1929年哈尔科夫会议上的大会报告The present state of quantum electrodynamics是对量子场论发展第一阶段的回顾。

约当接下来给物理学界展示了什么是“手里有金刚钻, 随手能干瓷器活儿”。1925年, 电子自旋概念被提出, 1926年约当与海森堡合作的论文即将自旋概念用到反常塞曼效应上。泡利1927年发表了“磁性电子的量子力学[Wolfgang Pauli, Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons,

Zeitschrift für Physik 43 (9-10), 601—623(1927)]”

一文, 该文引入了泡利矩阵和泡利方程, 收稿日期为1927年5月3日。约当紧接着就发表了Zur Quantenmechanik der Gasentartung(气体退化的量子力学)一文, 收稿日期为1927年7月7日。约当在这篇文章中即以含 $2\times 2$ 矩阵的量子力学方程讨论简并气体的问题。如果我们知道薛定谔1925年处理理想气体量子化、提出气-体(Gaskörper)概念的论文是他1926年波动力学论文的前奏, 就能体会这篇论文的重要性了。这篇文章之所以一般的量子力学文献不提起, 我估计是因为它物理浓度太高且其中的数学不易看懂, 比如其中式(9)可见基于两矢量构造的Clifford代数, 而式(10)中的三个虚矢量满足四元数的乘法(图2)。

基于对易关系  $pq - qp = \frac{\hbar}{2\pi i} \mathbf{1}$  以及谐振子模型, 狄拉克引入了玻色子的产生算符  $a^+$  与湮灭算符  $a$ , 满足关系  $[a, a^+] = aa^+ - a^+a = 1$ 。在同维格纳合作的1928年文章中, 约当他们引入了费米子产生算符与湮灭算符之间的反对易关系,  $\{a, a^+\} = aa^+ + a^+a = 1$ , 由此给了泡利不相容原理以场论角度的把握(图3)。

对易关系、反对易的关系联系着两种量子统计。约当是物理思想与数学功底俱佳的研究者, 哪会放过这里面的深意。相对晚到的冯·诺伊曼提出了量子理论的公理化框架(axiomatic framework), 特别地, 他把物理观测量同作用于希尔伯特空间之间的厄米算符(observables as Hermitian operators acting in a Hilbert space)等价起来。约当放弃了希尔伯特空间那套背景, 而是去公理化这个抽象代数结构。既然非交换代数能对应那么多物理, 约当于是想到放弃代数乘法的结合律[参见Pascual Jordan, Über eine Klasse nichtassoziative hyperkomplexer Algebra(一类非结合超代数), Göttinger Nachrichten, 569—575 (1932); Über Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik(量子力学表达式的推广可能性), Göttinger Nachrichten, 209—217 (1933)], 后来通过和维格纳、冯·诺伊曼的多年合作得到了一个对易但非结合的结构, 即约当代数。满足对易关

系  $AB = BA$  和约当恒等式  $(AB)(AA) = A(B(AA))$  的非结合代数为约当代数。此处数学、物理笔者不熟，打住。

还记得《数学物理方法I》的第一章是谈论线性变换的吧？当量子力学诞生后，约当自然会注意到变换在这个理论中的角色。约当想到发展出量子力学的变换理论，一点儿也不奇怪。算符变换理论，可简单理解为不依赖于基的抽象算子表述。谈论量子力学的变换理论的文献会称之为狄拉克—约当理论，因为狄拉克也独立发展了变换理论 (P. A. M. Dirac, The physical interpretation of the quantum dynamics, *Proceedings of the Royal Society of London A* **113**, 621—641 (1927))。约当在“量子力学的新筑基”一文的脚注中，提请大家注意 Fritz London 也部分地发现了本文中的内容(见 Fritz London, *Zeitschrift für Physik* **40**, 193 (1926))。

## 4 错失费米—狄拉克统计

费米—狄拉克统计是对遵循泡利不相容原理的粒子的量子统计。这个统计考虑的是用单粒子能量状态来描述几乎没有相互作用的多粒子态、但没有两个粒子处于相同那种多体状态中的情形。据信，费米—狄拉克统计是1925年由约当先推导出来的，并且他称之为泡利统计 [Engelbert Schücking. Jordan, Pauli, Politics, Brecht, and a Variable Gravitational Constant, *Physics Today* **52** (10), 26—31(1999); Jürgen Ehlers, Engelbert Schücking. Aber Jordan war der Erste (约当才是第一个), *Physik Journal* **1** (11), 71—74(2002)]。在接下来的 Eugen Wigner 以及 Oscar Klein 的文章中也是称为泡利统计的。当时约当把论文投给了 *Zeitschrift für Physik*，而主编玻恩把稿件往手提箱里一塞去了美国，等到玻恩半年后回来再拿出这篇论文，费米的论文已经发表了。这可是约当的“精神之子(Geisteskind)”，就这么被命运之神给错付了。在约当的《量子基础上的统计力学》一书里，约当会提到这个统计，但不提任何人的名字，其中悲愤，估计别人是无法体会的。后来有 Stanley

Deser 者评论道：“如果不是玻恩的失误，费米子应该叫‘约当子’(…without Max Born's faux pas the Fermions would have been called ‘Jordanions’)”。

关于耽搁了约当发现“泡利统计”一事，玻恩本人的叙述或许是可信的。“1925年12月我去美国 MIT 讲座。约当交给了我一个准备在 *Zeitschrift für Physik* 上发表的工作。我当时没时间读，就随手塞进我手提箱子里，忘得一干二净。等我半年后回到德国，打开手提箱，发现了躺在箱子底的那份工作。该工作包含现在称为 Fermi-Dirac 统计的内容，在此其间由费米和狄拉克独立发现。但是约当才是第一个 (Im Dezember 1925 ging ich nach Amerika, um Vorlesungen am MIT zu halten. Jordan gab mir eine Arbeit zur Veröffentlichung in der *Zeitschrift für Physik*. Ich fand keine Zeit sie zu lesen, steckte sie in meinen Koffer und vergaß die ganze Geschichte. Als ich dann ein halbes Jahr später nach Deutschland zurück kam und auspackte, fand ich die Arbeit auf dem Boden des Koffers. Sie enthielt, was man jetzt die Fermi-Dirac-Statistik nennt. In der Zwischenzeit war sie von Enrico Fermi und unabhängig von Paul Dirac entdeckt worden. Aber Jordan war der Erste)”。

## 5 作为量子生物学奠基人的约当

约当博学多识，有种说法，约当对专业逼仄的枷锁毫不在意 (die Fesseln fachwissenschaftlicher Enge nicht zu respektieren)。约当自幼喜欢生物学(薛定谔也是)，他大学的辅修专业就是动物学。约当发展了量子力学，也自动把量子力学用到了理解生命上面。1932年，约当发表了 *Die Quantenmechanik und die Grundprobleme der Biologie und Psychologie* (量子力学与生物学/心理学基础问题), *Die Naturwissenschaften* **20**, 815—821 (1932)一文。量子生物学(Quantenbiologie)便是他的主意(参见 *Anschauliche Quantentheorie* 一书)。1941年，约当出版了 *Die Physik und das Geheimnis des organischen Lebens* (物理学与有机生命的

秘密), Vieweg & Sohn (1941)一书。不知道有几个量子生物学家同时具有量子力学(熟悉量子力学已是奢望, 如约当一样是量子力学奠基人更是历史地不可能了)和生物学的背景, 不知道有几个量子力学背景的量子生物学家愿意学会量子力学和生物学, 也不知道有几个生物学背景的量子生物学家愿意学会生物学和量子力学。

## 6 对约当的忽略

从笔者1984年开始接触量子力学算起, 在笔者见到的中文量子力学文献中约当几乎不曾被提及(应该是因为不知道), 而在笔者所见到的流行的英文、德文表述中对约当也是鲜有提及。约当很帅, 约当口吃, 但这似乎不是他被故意忽视的原因。至于他的政治观点与社会活动问题, 那是他创造量子力学和量子场论多年以后的事情, 也不能解释为什么当时就备受忽视。约当的物理贡献为什么会被故意忽视, 似乎是个谜。

为了让大家对物理学圈和物理学史圈对约当的忽视有个感觉, 我举两个当前的小例子作为证



图4 约当与泡利, 1955年。看起来那时约当是很爽朗的一个人

Ein neues Verfahren zur Prüfung photographischer Momentverschlüsse  
J. A. M. v. Liempt & J. A. de Vriend  
OriginalPaper | 19 October 2013 | Pages: 198 – 201

Über die bei der Lithiumzertrümmerung durch Protonen auftretende weiche  $\gamma$ -Strahlung.  
A. Eckardt, R. Gebauer & H. Rausch von Traubenberg  
OriginalPaper | 03 October 2013 | Pages: 204 – 209

图5 约当的Zur Quantenelektrodynamik I一文前后文在*Zeitschrift für Physik*杂志的网站上都存在, 独独它是缺失的

据。例一, 我手边有《泡利物理学讲义》, 其中卷六为 Selected topics in field quantization (the MIT Press). 讲 field quantization (Feldquantisierung, 场量子化), 这是约当创立的学问, 故约当是绕不过去的。约当与泡利交好多年, 也是各自身上有值得“惺惺相惜的地方的一对儿”(图4)。那么, 泡利或者讲义的编者在这本书中提及约当多少次呢? 一次, only once, 在p.7上。令人哭笑不得的是, 所给的参考文献 “P. Jordan, E. Wigner, Z. Physik **45**, 751(1928)” 还是错得离谱的。这是把 P. Jordan, O. Klein, Zum Mehrkörperproblem der Quantentheorie (量子论中的多体问题), *Zeitschrift für Physik* **45**, 751—765 (1927) 与 P. Jordan, E. Wigner, Über das Paulische Äquivalenzverbot (论泡利的等价禁制), *Zeitschrift für Physik* **47**, 631—651 (1928) 这两篇论文给混到一起去了。问题是, 该书从1971年出版, 影响遍及整个全世界, 也不知道印了多少语种、多少版次, 这个问题却一直在, 可见没人在意约当的这两篇文章。那可是用反对易关系表示泡利不相容原理的工作啊。

例二事关 P. Jordan, Zur Quantenelektrodynamik I (量子电动力学 I), *Zeitschrift für Physik* **95**, 202—203 (1935)一文。这是量子电动力学最原始的论文。然而, 在笔者撰写本文的此刻 (2024.08.26), 杂志的网站上这篇文章是缺失的。对的, 独独它是缺失的(图5)。如果不是亲自经历, 我也不信。

## 7 多余的话

从参与撰写《数学物理方法 I》开始, 到发展出约当代数,兜兜转转, 约当展示了他终究是个数学家的特质。他是一个懂量子力学的量子力学奠基人。狄拉克、泡利可与之相比拟。冯·诺伊曼也是这类人, 但他错过了创造量子力学的盛宴。约当还是有极高哲学素养的科学家, 他后来的诸多著作无疑地证明了这一点。笔者提请读者注意, 对经典物理的量子论转述 (quantentheoretische Umdeutung der klassischen Physik), 是当初构造量子力学的方法, 玻尔的对应原理, 薛定谔、玻恩

论述波函数诠释时提到的对波函数之粒子意义上的转述 (Umdeutung)，皆与此有关。愚以为这里也就隐藏着学习量子力学的诀窍，即学好经典物理，然后将相关知识作量子论的转述 (quantentheoretische Umdeutung)，然后就理解量子力学了。其实，早在 1929 年，年仅 27 岁的约当就指出，(未来)应在没有经典对应这个拐杖的前提下一步到位地表述关于电的纯量子理论 ( $\cdots$  und in einem Zuge, ohne klassisch-korrespondenzmaessige Kruecken, eine reine Quantentheorie der Elektrizitaet zu formulieren versuchen)，(量子场论) 应该从自身找到一条新出路 (muss aus sich selbst heraus neue Wege finden)。你看他这话多得罪人，多狂妄。

约当是量子力学的奠基人之一，但他似乎对量子力学的态度很平淡，能很客观地看待量子力学的威力与不足，从没有什么装神弄鬼的言论。约当是熟悉  $[q, p] = i\hbar$  的局限的。满足  $[A, B] = i\hbar$  这种关系的一对变量被当作正则共轭的。在 1927 年的“论量子力学的新筑基 II”一文中，约当就指出哈密顿量  $H$  就没有什么正则共轭 (各位读者注意，因此所有的能量—时间不确定性的关系都是硬性地瞎凑的)；角动量也不满足这种关系，没有什么正则共轭问题。约当熟悉实验物理 (见与 Franck 合作的著作)，他早就指出，观测不止是扰动待测量的系统，实际上更多地是产生实验的结果，即我们自己造成了结果 (Wir selber rufen die Tatbetände hervor，见于 1932 的文章)。约当这句话是对的，请参阅扰动理论处理的两种情形，一种是哈密顿量中的相互作用项仅仅扰动了无相互作用时哈密顿量的能谱，一种是相互作用项的加入造成了新的哈密顿量，系统行为由新哈密顿量的能谱以及对应的状态所描述 (参见狄拉克《量子力学原理》)。后来，约当在 On the process of measurement in quantum mechanics, *Philosophy of Science* 16, 269—278(1949) 一文中更是拒绝了“‘measurement’ is a fundamental concept which ought not to be analyzed”的传统观点。

在 20 世纪喧嚣的尘埃早已落定的 21 世纪，愚

以为量子力学应该以其固有的面目呈现于世人面前。所谓的固有面目，当以原始学术文献为唯一依据。这一准则，适用于物理学的所有领域。物理学以其固有的面目、遵循其应当遵循的自然逻辑被呈现，更可见其浑然一体而又各呈精妙处，则其传承也易，服务于人类也更有效。可以完全依照文献，像狄拉克做量子力学那样纯粹地按照文献中量子力学展开的真实过程去再现它，阐述它。

历史的真相细节已不重要，但是学问细节本身重要。当我们真心学会了某一门学问，则历史的真实细节便也会为我们所熟知。历史的真相可以被遗漏甚至故意掩盖、扭曲，但学术的逻辑自己会诉说。这是科学史独特的地方，当然这里所说的科学仅限于数学和物理。这是笔者关于科学史的一点浅见。

对于历史上发生的事情，后人谈论其合理与否已经于事无补，我们能做的就是接受既成事实。很多的情形，所谓的事实也是无从谈起的，这是历史(学)的无奈。所幸的是，一者科学自有其内在的逻辑，我们可以从科学的内在逻辑去部分校准历史表述，虽然学问发生的逻辑不一定是学问自身的存在逻辑；二者科学是最注重纪录以及传承与表述的。尤其是自十九世纪中后叶以来的科学发展，其原始文献堪称完整。这是人类之大幸 (我们中国人是否应该不遗余力地建立一份拷贝？)。

## 参考文献

- [1] Howard D. Quantum Mechanics in Context: Pascual Jordan's 1936 Anschauliche Quantentheorie. Neopubli, 2013
- [2] Schücking E. Physics Today, 1999, 52(10):26
- [3] Ehlers J. Schücking E. Physik Journal, 2002, 1 (11):71
- [4] Schroer B. Pascual Jordan, His contribution to quantum mechanics and his legacy in contemporary local quantum physics, Notas de Fisica, Ministerio da ciencia e tecnologia, Brasil (May, 2003). 2003, arXiv:hep-th/0303241
- [5] Jammer M. The philosophy of quantum mechanics. John Wiley & Sons, 1974
- [6] Petz D. An Invitation to the Algebra of Canonical Commutation Relations. Cornell University Press, 1990
- [7] Fedak W A, Prentis J J. Am. J. Phys., 2009, 77 (2):128
- [8] Born M. Mein Leben (我这一辈子). Nymphenburger, 1975