远离的月球，刹车的地球——潮汐锁定

吴从军†

（西湖大学物理系　新基石科学实验室　杭州　310024）

2024－09－23收到

† email：wucongjun@westlake.edu.cn

DOI：10.7693/wl20241107

CSTR：32040.14.wl20241107

在古往今来的中秋赏月诗词中，最独特的莫过于辛弃疾的这首《木兰花慢·可怜今夕月》：

可怜今夕月，向何处，去悠悠？是别有人间，那边才见，光影东头？是天外空汗漫，但长风浩浩送中秋？飞镜无根谁系？姮娥不嫁谁留？

谓经海底问无由，恍惚使人愁。怕万里长鲸，纵横触破，玉殿琼楼。虾蟆故堪浴水，问云何玉兔解沉浮？若道都齐无恙，云何渐渐如钩？

辛弃疾生活在公元12世纪，是南宋著名词人和军事将领，他的一生颇具传奇色彩。特别是他在青年时代，起义于北方金国统治区，深入敌营、斩将搴旗、渡淮南归的故事，千古流芳。他的这首中秋词，模仿楚辞《天问》，抓住了远古神话中的诸多矛盾之处，对月相和月球运行的机制追根问底。即使不谈其文学性，单从物理学的角度看，这些问题的水平也是非常高的。

《费曼物理学讲义》(第1卷)的第7章写到，在牛顿时代之前，人们曾普遍认为天体是由看不见的天使拍着翅膀沿着轨道的切向来驱动。令人惊奇的是，“飞镜无根谁系”表明辛弃疾已经隐约地觉察到了径向吸引力的存在，就像是有根看不见的绳子一样。相对于他的时代，这无疑是很先进的了。由于时代的限制，辛弃疾不可能具备解决这些问题的知识积累和科学训练。要等到17世纪的牛顿力学和引力理论建立了，人类才认识到月球绕地球转和树上掉个烂苹果，这两件事情之间没有本质的区别，它们服从相同的自然规律。天体运行没有任何超自然的神圣性可言，这是人类历史上的一次认知革命。

月球的诞生是几十亿年前的事情了[1]。古诗中说“今人不见古时月，今月曾经照古人”，又有“秦时明月汉时关”。恐龙时代的月球轨道和现在的相比，有什么不一样呢？一个很自然的问题就是，月球离我们是越来越近了呢，还是越来越远了呢？

天文观测表明，地月距离以每年3.8 cm的速度在增加[2]。虽然这点变化相比于长达3.8×10^5 km的地月间距，实在是小得很。但是在漫长的地质年代里，其积累起来的效果是非常可观的。例如，按此速率外推，在过去的10亿年里，地月距离增长了3.8×10^7 m，也就是3.8×10^4 km，这已经达到了地月距离的十分之一量级。

如果在地质年代的时间尺度上研究地月系统的运行，地球和月球都不能再被当作质点来处理，因为它们的内部并非铁板一块，从而存在潮汐。潮汐锁定效应使得月球远离。简单的说，潮汐导致地月系统的能量耗散，这使得地球的自转变慢，就像是被刹了车一样。这个过程中损失的角动量被转移到了月球的轨道角动量，从而使得月球轨道远离地球。

在仔细阐述之前，我们考虑如下问题：如果把地月系统近似地看成是孤立系统的话，它们的总角动量是守恒的，即地球自转、月球自转、月球公转角动量之和为一定值。那么在什么样的情况下，该系统的总能量最小？

设地球自转角速度$\omega_{\rm e}$、月球自转角速度$\omega_{\rm m}$、月球公转角速度ω_0，先固定地月间距为R。为简单计，我们只考虑这三个角速度的方向相同的情况，如图1所示。则有，$J=I_{\rm e}\omega_{\rm e}+I_{\rm m}\omega_{\rm m}+I_0\omega_0$，其中$I_{\rm e}$，$I_{\rm m}$分别是地球、月球自转的转动惯量；$I_0=mR^2$可以认为是公转的转动惯量，其中$m$是月球质量。地月系统的总动能可以写成：

$$E_{\rm K}=\frac{1}{2}\left(I_{\rm e}\omega_{\rm e}^2+I_{\rm m}\omega_{\rm m}^2+I_0\omega_0^2\right),\quad(1)$$

利用柯西(Cauchy)不等式，可以很容易得出$2E_{\rm K}(I_{\rm e}+I_{\rm m}+I_0)\geqslant J^2$，即

$$E_{\rm K}\geqslant\frac{J^2}{2(I_{\rm e}+I_{\rm m}+I_0)},\quad(2)$$

其中等号在三个角速度相等的时候达到，即$\omega_{\rm e}=\omega_{\rm m}=\omega_0$。此时，地月系统就像是组合成一块的刚体那样运动，这种现象叫做潮汐锁定。在这种情况下，地月系统只有整体运动，没有内部的相对运动，所以

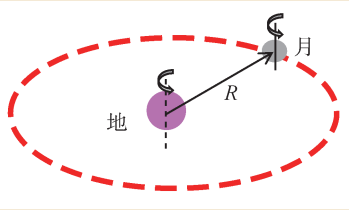

图1　地月系统示意图。为简单计，设地球自转、月球自转、月球公转的轴是平行的

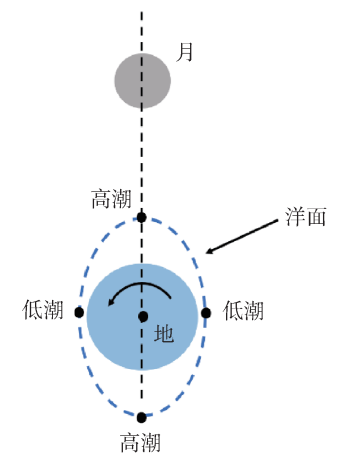

图2 潮汐是因为月球对地球的引力的梯度所引起的，从而洋面表现出四极矩变形。粗略地说，高潮位出现在地月连线和洋面的交点，而低潮位出现在洋面与垂直于地月连线方向的交点

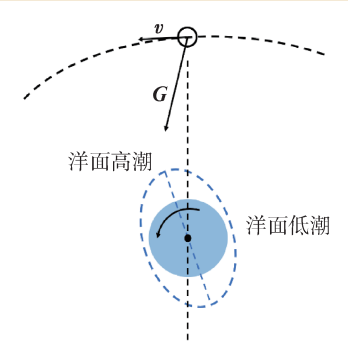

图3 洋面的潮汐变形对地壳的摩擦减慢了地球自转。同时，地壳也拖曳洋面的潮汐位形，使得高潮位稍稍偏离地月连线。这使得地球对月球的吸引力偏离了地月质心连线，使得月球沿着轨道切线加速。这样就把地球损失的角动量传递到了月球的轨道运动，并且使月球远离地球

总动能最低。

事实上，地月系统的现状是月球自转的角速度ω_{m}等于其公转角速度ω_0，已经被锁定了。月球公转和自转的周期都是29.5天，这也是月球一直以固定的一面朝向地球的原因。在亿万年的磨合中，这两个自由度已经达到了能量最小。地球的块头太大，地球的年龄还不足以把其自转的能量充分地耗散，结果是地球自转还没有和月球运动形成锁定。目前，它们的周期相差近三十倍。这会导致什么情况呢?

地球表面有海水，在月亮的引力作用下，会发生潮汐现象。牛顿解释了潮汐的周期为什么是12个小时，而不是一昼夜24小时。这是因为潮汐是月球引力梯度的效应所致。设地月位置如图2所示，地球自转轴垂直纸面。地球上各点都被月球吸引，但是离月心距离不同，被吸引的强度是不同的。地月连线通过洋面的两个地方，一个是近月点，一个是远月点。相对于地球的中心而言，月球对近月点洋面的吸引要比对地心的吸引更强，而对远月点洋面的吸引要比对地心的吸引更弱。这导致这两处的洋面都远离地心，形成了高潮位。相应地，洋面上与地月连线垂直的两个方向对应于低潮位。

月球在一天内由于公转产生的位置变化不大，可以忽略。洋面的高潮位置相对于月球几乎是静止的，但是地壳随着地球自转而动。所以，洋面上的一点每天要经过两个高潮位和两个低潮位。

如果只考虑月球引力，高低潮水位每天都是一样的，相差半米左右。太阳引力的潮汐效应也会带来影响。在农历初一、十五附近的时间，日月和地球连成一条直线，太阳和月球引力的潮汐叠加在一起，造成天文大潮。此外，潮汐还要受到地形等复杂因素的影响。对于像钱塘江大潮那样的潮水，杭州湾喇叭口的地形特点带来的汇聚效应，也是至关重要的因素。

潮汐效应引起的洋面高潮低潮位形，随着月球的公转所导致的月球位置变化而动，变动缓慢，而地球自转是很快的。因此，月球通过海水对地壳产生了摩擦，从而对地球的自旋进行了刹车。地球会越转越慢，直到潮汐的洋面位形和地球自旋的角速度相同，彼此才不会再进行牵扯，这就是潮汐锁定的机制。

在潮汐锁定的过程中，机械能变成热能。例如，在木星的卫星木卫二(Europa)上，有个冰封的大洋。冰盖下面是上百公里深的液态水，其热量就来源于木星引力的巨大潮汐效应。回到地月系统，在潮汐锁定的过程中，地球自转角动量是在减小的。如果忽略太阳的影响，地月系统的角动量是守恒的，损失的角动量要转移到月球的运动中。我们来估算一下月球自转的角动量J_{s}和公转角动量J_{L}的比值：

$$\frac{J_{\mathrm{s}}}{J_{\mathrm{L}}}\sim\left(\frac{r_{\mathrm{m}}}{R}\right)^2\sim 10^{-5}, \tag{3}$$

其中$r_{\mathrm{m}}=1700\ \mathrm{km}$是月球半径，因此月球自转角动量可以被忽略。地球损失的角动量主要转移到月球的轨道运动中。

这个过程具体是怎样发生的呢?洋面的潮汐变形被地壳摩擦所拖曳，洋面的高潮位其实并不在地月连线上，而是沿着地球自转的方向稍稍偏一点。这样的洋面形状，使得地球的质量分布不再具有球对称性了。而地球对月球的引力，就不再沿着地月连线，而是稍稍指向高潮位所在处，如图3所示。这样，地月引力就有了一个切向的分量来加速月球的轨道运动。这个对月球的加速，保持了总角动量守恒，同时也使得月球轨道远离地球。

为简单计，设月球轨道为正圆，则月球公转的轨道速度为$v=\sqrt{GM/R}$，其中G是万有引力常数，M是地球质量。则月球绕地球的轨道角动量为$J_{\mathrm{L}}=mvR=m\sqrt{GMR}$，即$R\propto J_{\mathrm{L}}^2$。随着月球轨道角动量的

增加，轨道的高度也在增加。另一方面，月球公转的角速度在变小，

$$\omega_0 = \frac{J_L}{mR^2} = \frac{G^2 m^3 M^2}{J_L^3} \propto J_L^{-3} \ . \quad (4)$$

也就是说，每个月的时间在变长。

下面来具体估算一下月球远离的速度和地球自转变慢的速度之间的关系。根据 $R \propto J_L^2$，得到 $\frac{\Delta J_L}{J_L} = \frac{1}{2}\frac{\Delta R}{R}$，对于地球的自转，容易有 $\frac{\Delta J_e}{J_e} = \frac{\Delta \omega_e}{\omega_e}$。通过角动量守恒得到 $\Delta J_L = \Delta J_e$，则 $\frac{\Delta \omega_e}{\omega_e} = \frac{1}{2}\frac{\Delta R}{R}\frac{J_L}{J_e}$。简单的计算可得，$\frac{J_L}{J_e} = \frac{5}{2}\frac{r_m^3 R^2}{r_e^5}\frac{\omega_0}{\omega_e}$，这个推导过程留给读者作为一个练习。代入上式，我们得到：

$$\frac{\Delta \omega_e}{\omega_e} = \frac{5}{4}\frac{\Delta R}{R}\frac{r_m^3 R^2}{r_e^5}\frac{\omega_0}{\omega_e} \ . \quad (5)$$

代入一年中地月距离的变化 $\Delta R = 3$ cm，得 $\frac{\Delta R}{R} = 10^{-10}$。再加上 $\frac{r_m^3 R^2}{r_e^5} \approx 66$，以及 $\frac{\omega_0}{\omega_e} \approx \frac{1}{30}$，可得

$$\frac{\Delta \omega_e}{\omega_e} = \left|\frac{\Delta T}{T}\right| \approx 2.8 \times 10^{-10} \ . \quad (6)$$

容易算出，在一年的时间内，每天 $(8.6 \times 10^5$ s)由于潮汐锁定导致的延长有 2.4×10^{-5} s。这个变化虽然非常小，但却是可以测量的。

珊瑚化石生长线记载了在3亿7千万年前，每年约有400天。这也就是说，那时候的1天大约有 $\frac{365}{400} \times 24 = 22$ 小时，也就是说目前的每天时间比3亿7千万年前的每天长了2个小时。上面的估算所给出的1天时间的延长约为 $3.7 \times 10^8 \times 2.4 \times 10^{-5}$ s ≈ 2.5 小时，这和化石的记录是相符的。当然估算只能够达到数量级的准确度，并不追求数值上的精度。

可以进一步推论：在几十亿年前的冥古宙、太古宙，地球的自转角速度要比现在快得多，可能快上一个数量级。地转偏向导致的科里奥利力也比现在要强很多。如果研究那个年代的古气候，这个效应也许是需要考虑的因素。即使在几亿年前的恐龙时代，要研究那个时候的古生态和古气候，比如台风等，也需要考虑当时的地球自转角速度。

在遥远的未来，当地球自转最终也被潮汐锁定之后，月球轨道也就稳定下来。有兴趣的同学不妨估算一下，那时候的月球轨道有多高、地球的一天有多长。可以想象，地球的自转会变得非常慢了，这当然对地球的影响也是非常大的。

致 谢 感谢新基石基金会的资助。

参考文献

[1] Origin of the Moon. https://en.wikipedia.org/wiki/Origin_of_the_Moon

[2] Tidal acceleration. https://en.wikipedia.org/wiki/Tidal_acceleration

读者和编者

订阅《物理》得好礼

——超值回馈《岁月留痕—<物理>四十年集萃》

为答谢广大读者长期以来的关爱和支持，《物理》编辑部特推出优惠订阅活动：向编辑部连续订阅2年《物理》杂志，将获赠物理类科普图书或《岁月留痕—<物理>四十年集萃》一本。该书收录了1972年到2012年《物理》发表的40篇文章，476页精美印刷，定价68元，值得收藏。

订阅方式(编辑部直接订阅优惠价180元/年)

(1) 邮局汇款

收款人地址：北京市中关村南三街8号中科院物理所，100190

收款人姓名：《物理》编辑部

(2) 银行汇款

开户行：农行北京科院南路支行

户 名：中国科学院物理研究所

帐 号：11 250 1010 4000 5699

(请注明《物理》编辑部)

咨询电话：010-82649029，82649277

Email：physics@iphy.ac.cn

SR830 数字锁相放大器

... 业界的标准

SR830 ... $6595（国际标价）

- 1 mHz 至 100 kHz 频率范围
- 100 dB 动态储备
- 5 ppm 稳定性
- 自动增益, 相位和动态储备
- 谐波检测 (2F, 3F, ... nF)
- 10 µs 至 30 ks 时间常数
  (6, 12, 18, 24 dB/倍频程衰减率)
- GPIB 及 RS-232 界面

SR830是世界上使用极其广泛的锁相放大器。它具有令人印象深刻的模拟规格，许多有用的功能，并且价格合理。以超过100 dB的动态储备和0.01度的相位分辨率，SR830可以处理相当苛刻的同步检测应用。它具有便捷的自动测量功能，包括多个时间常数的选择以及内置正弦源。

您需要锁相放大器提供的一切!

Stanford Research Systems
www.thinkSRS.com/products/lockin.html · Tel: 408-744-9040

先锋科技股份有限公司
电话：86-10-6263-4840
传真：86-10-8261-8238
Email: sales@teo.com.cn

欧陆科技有限公司
电话：86-10-6800-8213/16/17
传真：86-10-6800-8212
Email: euro-tech.bj@euro-tech.com

北京东方科泰科技发展有限公司
电话：86-10-5129-4988
传真：86-10-5824-6090
Email: sales@bost-ltd.com

请扫描二维码了解更多产品详情