

量子场论的可积性方法

江云峰[†]

(东南大学物理学院 丘成桐中心 南京 210096)

2025-04-07 收到

[†] email: jinagyf2008@seu.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20250602

CSTR:32040.14.wl20250602

Integrability methods in quantum field theory

JIANG Yun-Feng[†]

(Shing-Tung Yau Center, School of Physics, Southeast University, Nanjing 210096, China)

摘要 可积量子场论是具有无穷多局域守恒流的特殊量子场论,一般只能定义在1+1维时空。这类量子场论可以用可积性方法精确求解,是研究非微扰量子场论的重要理论模型。近年来,可积性方法被应用于某些高维时空的量子场论的求解,对于深入理解高维量子场论和量子引力理论起到日益重要的作用。文章介绍可积量子场论的概念及精确求解的主要思想与方法。

关键词 量子场论, 可积性, S-矩阵, 杨—巴克斯特方程

Abstract An integrable quantum field theory is a special type of quantum field theory possessing infinitely many local conserved currents, which can generally only be defined in 1+1-dimensional spacetime. Such quantum field theories can be solved exactly using integrability methods and serve as an important prototype for studying non-perturbative quantum field theory. In recent years, integrability methods have been applied to solve certain quantum field theories in higher dimensional spacetimes, playing an increasingly significant role in deepening our understanding of higher-dimensional quantum field theories and quantum gravity. This article introduces the concept of integrable quantum field theories and the main ideas behind their exact solutions.

Keywords quantum field theory, integrability, S-matrix, Yang—Baxter equation

1 引言

1.1 量子场论:从经典到量子

我们在中学物理中就接触过场的概念。以电磁学为例,电荷和磁体周围存在一种看不见的实体——电磁场,它可对电荷施加作用力,也能使铁屑排列成规则的图案,如图1所示。

“场”这一概念最早由英国物理学家法拉第于

1845年提出,场概念的提出最早与解释电荷间的相互作用有关。我们知道同种电荷相互排斥,异种电荷相互吸引,这种作用是如何实现的?最直观的解释是所谓的“超距作用”——两个带电粒子可以不借助任何媒介,瞬间在任意距离上产生相互作用。但这种观点在哲学上很不自然。更合理的解释是:带电粒子通过它们产生的电磁场相互影响。如此一来,场就成为了相互作用的媒介,使得作用变得局域化。麦克斯韦的理论进一步揭示,场不仅能传递相互作用,还能以电磁波的形式

式在空间中传播，且速度是有限的，这就是电磁波。可以说，场是物理学中最基本也是最重要的概念之一。

将场的概念与量子力学原理相结合，就产生了量子化的场。简而言之，量子场能在时空各处产生或湮灭粒子。量子场论就是以这种量子化的场为基本研究对象的理论框架。在这个理论中，粒子被视为场的激发，因此量子场论能自然地描述多粒子系统。作为现代物理学的基石，量子场论既是构建粒子物理标准模型的理论框架，也是研究量子多体系统集体行为的有效方法。

1.2 对称性

对称性在物理学中同样占据核心地位。日常生活中，我们常能直观地感觉某些图形比其他图形更“对称”。如何更严谨地定义这种直觉呢？物理学中，如果一个对象在某种变换下保持不变，我们就说它具有相应的对称性。以三角形为例：普通三角形需要三个参数(如三边长度)才能完全确定形状；等腰三角形由于具有一条对称轴(图2(b)中的虚线)，图形关于这个对称轴翻转对称，因此仅需两个参数就能确定；而等边三角形具有三条对称轴(图2(c)中的三条虚线)，只需一个参数(边长)就能确定。

这个简单的例子揭示了一个深刻的原理：对称性越高，对象就越简单，所需的描述参数也越少。在量子场论中，对称性表现为理论在特定变换下的不变性。最基本的对称性包括时空平移、旋转和伪转动等，这些变换构成庞加莱群，而这些与空间和时间操作相关的对称性称为时空对称性。场论的时空对称性来自于相对论的要求。此外，场论还可能具有内禀对称性——即改变粒子内部属性(如电荷、自旋)但保持所有物理观测量不变的变换。

对称性越高，理论就越简单。但这是否意味着对称性越高越好？实际上，过高的对称性会使理论变得平庸，退化为自由场论(即场激发的粒子间没有相互作用)。美国理论物理学家 Coleman 和

Mandula在1967年证明了一个重要定理^[1]：对于大多数场论而言，如果时空对称性大于庞加莱群，理论只能是自由场论。这个“不可行定理(no-go theorem)”为场论的对称性设定了某种自然界限。

1.3 可积性

物理学中有许多“不可行定理”，但人类的本性总是渴望突破限制。Coleman—Mandula定理在1+1维时空(一维空间加一维时间)中并不适用，这使得1+1维量子场论可以拥有远大于庞加莱群的对称性。某些理论甚至具有无限多对称性，这类特殊的量子场论被称为可积量子场论。尽管对称性极高，它们仍能描述有相互作用的粒子系统，而且由于对称性带来的简化，这些理论可以精确求解。

量子场论是相当复杂的理论，这从相关教科书的厚度就可见一斑。对于有相互作用的场论，并没有普适的求解方法。这里的求解指的是计算量子场论的各种可观测量，包括能谱、散射振幅和关联函数等。当前处理相互作用量子场论的主要手段是微扰方法。微扰方法在量子场论的发展历程中取得了辉煌的成功，电子反常磁矩的高精

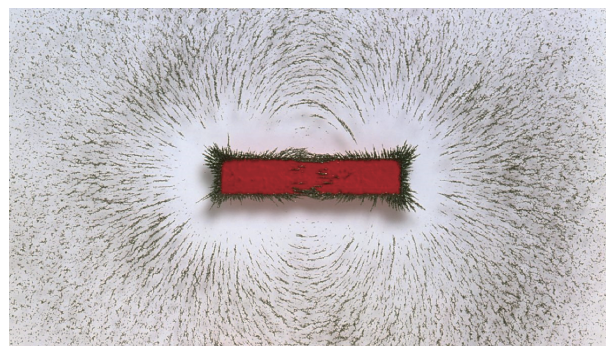


图1 磁铁周围的铁屑排布成规则的形状，反映了磁场的存在

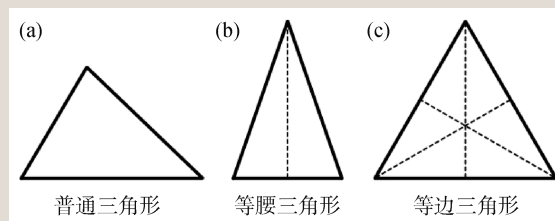


图2 不同三角形的对称性

度计算就是一个著名的范例。然而，微扰方法也存在诸多局限性。例如，(1)高阶计算极其复杂；(2)仅适用于弱耦合情形；(3)某些物理量的微扰级数甚至不收敛。更重要的是，像夸克禁闭、高温超导等重要物理现象都发生在非微扰区域。因此，发展非微扰方法求解量子场论是一个重要的研究课题。可积量子场论的价值正在于此——它提供了一个研究非微扰量子场论的重要窗口。在可积量子场论中，能谱、散射矩阵、关联函数等重要物理量都可以通过非微扰方法严格计算，这些方法统称为“可积性方法”。

2 量子场论与S-矩阵理论

标准的量子场论教科书通常使用作用量(action)来描述量子场论。作用量是场的泛函，通过最小作用量原理可以导出场的运动方程。给定一个经典作用量，我们可以通过量子化程序得到相应的量子理论。然而，作用量并非总是最便捷的描述方式，尤其是在研究可积量子场论时，另一种基于粒子散射图像的描述方式往往更为有效，这一描述方式可以追溯到量子理论的早期。

2.1 S-矩阵理论与自举思想

早在20世纪30年代，一些物理学家(如原子弹之父奥本海默)就发现量子场论的高阶微扰计算会出现发散(即无穷大)，而当时重整化理论尚未成熟，人们不知道如何处理这些发散。面对这一困境，惠勒和海森伯提出了一个大胆的方案：放弃量子场论，转而研究实验上可观测的散射振幅，即S-矩阵(S是“散射”(scattering)的缩写)。S-矩阵理论的核心思想是：不依赖具体的场论作用量，而是直接从物理原理出发，约束和确定散射振幅的形式。这些约束包括：

(1) 么正性(unitarity)——保证散射过程的概率守恒；

(2) 交叉对称性(crossing symmetry)——反映粒子与反粒子之间的对称性；

(3) 解析性(analyticity)——S-矩阵作为动量和能量的复变函数，其解析结构蕴含了理论粒子谱的信息。

这种通过一般性原理而非具体模型来构建物理理论的方法，被称为自举(bootstrap)方法。关于量子场论中自举思想的详细介绍，可以参见本专题中周稀楠的相关文章^[2]。

2.2 S-矩阵理论的兴衰

在1960年代，S-矩阵理论煊赫一时，一度成为高能物理理论的主流。当时，实验上不断发现新的强子，粒子谱变得极其复杂，而量子场论似乎难以解释这些现象。S-矩阵理论因其非微扰性和普适性备受期待。

然而，到了1970年代，S-矩阵理论开始逐渐式微，主要原因有二：

(1) 理论过于复杂——其数学框架高度复杂和技术化，非专家难以掌握和应用；

(2) 量子场论的复兴——量子色动力学的成功，以及重整化理论的完善，使得场论重新成为高能物理的核心工具。

尽管如此，S-矩阵理论并未被彻底抛弃。它的核心思想——通过对称性和解析性约束物理理论——仍然具有深远影响。过去20多年，量子场论的两个重要进展都可以视为这一思想的延续。在微扰计算方面，散射振幅的在壳方法(on-shell)于2000年之后蓬勃发展，取得了令人瞩目的成绩，该方法充分利用了散射振幅的么正性和解析性质，极大地提高了散射振幅计算的效率。在非微扰计算方面，随着计算能力的提升，现代共形自举(conformal bootstrap)方法的兴起成功带动了S-矩阵自举(S-matrix bootstrap)方法的复兴，成为研究强耦合场论的重要工具。与1960年代相比，现代S-矩阵自举方法在目标上选择退而求其次：不奢求得到S-矩阵的解析表达式，但希望通过一般性原理和解析性质来限制理论中物理量的可能取值范围。如果这个限制足够强，则从实用层面来说，与精确计算得到的结果相差不大。

S-矩阵理论最初的愿景：完全确定散射振幅，进而计算所有物理量，在可积量子场论中得到了最完美的实现。由于可积性对理论的动力学具有很强的限制，这些理论的S-矩阵被大大简化，甚至能精确求解。在此基础上，物理学家发展了一系列非微扰方法，能够计算能谱、关联函数等其他物理量。

3 可积量子场论的求解

3.1 S-矩阵的简化

在量子场论中，S-矩阵描述入射粒子经过相互作用后演化为出射粒子的过程，其矩阵元对应不同散射过程的概率幅。在一般的场论中，S-矩阵的形式极其复杂——它依赖于所有入射和出射粒子的动量，而这些动量在高维时空中的组合方式有很多，因此S-矩阵依赖于多个自变量。然而，在1+1维可积量子场论中，由于空间仅有一维，粒子的能量(E)和动量(p)可以完全由快度(rapidity) θ 参数化：

$$E = m \cosh \theta, \quad p = m \sinh \theta.$$

其中， m 是粒子的质量。由二维洛伦兹不变性，S-矩阵实际上仅依赖于粒子的快度差。更关键的是，可积性(即存在无穷多守恒量)对S-矩阵施加了极强的约束，导致散射过程满足以下性质：

(1) 弹性散射：可积性要求散射过程不改变粒子数，且出射粒子的快度集合与入射粒子完全相同(仅顺序可能改变)。换句话说，粒子在散射过程中只交换动量，而不会产生或湮灭。

(2) 因子化：任何多粒子散射都可以分解为一系列两粒子散射。这一性质源于在可积场论中可以对粒子的世界线进行移动而不改变散射振幅的值。利用这个世界线移动自由，我们可以移动粒子的世界线使得不同粒子之间相距很远，如图3所示，从而将复杂的散射过程分解为一系列两体散射过程。

这里我们注意到1+1维时空和高维时空的本质不同。在高维时空中，如果类似的可积性允许我们自由移动粒子的世界线而不改变散射振幅，

则粒子总可以通过“绕行”避免相互作用，因此高维可积场论是自由理论，这正是Coleman—Mandula定理的体现。在1+1维的量子场论中，由于空间是一维的，因此粒子要从入射态到出射态必须经过散射过程，因此散射是不可避免的，但却是可分解的。

3.2 杨—巴克斯特方程

由以上讨论可知，对于可积量子场论，所有相互作用的信息都包含在两体S-矩阵 $S_{ab}^{cd}(\theta)$ (其中 a, b 是入射粒子， c, d 是出射粒子)中。那么，如何确定其具体形式？这里可以利用S-矩阵的自举思想。除了么正性和交叉对称性之外，可积场论还有一个特有的关键自洽条件——杨—巴克斯特方程。杨—巴克斯特方程的来源其实很简单。考虑三粒子散射，可积性允许我们将散射过程分解为三个两体散射，但分解方式不唯一(例如1-2先散射，再与3散射；或2-3先散射，再与1散射)，如图4所示。

自洽性要求这两种分解方式的结果必须一致，这一约束正是杨—巴克斯特方程：

$$S_{12}(\theta_1 - \theta_2) S_{13}(\theta_1 - \theta_3) S_{23}(\theta_2 - \theta_3) = S_{23}(\theta_2 - \theta_3) S_{13}(\theta_1 - \theta_3) S_{12}(\theta_1 - \theta_2).$$

杨—巴克斯特方程是可积系统的核心方程，我们简单介绍一下其历史脉络。

(1) 1967年，杨振宁在研究一维多体问题时首次提出该方程^[3]。

(2) 在统计物理领域，类似的方程首次出现在1944年昂萨格严格求解二维伊辛模型的论文中，被称为“星—三角关系(star—triangle relation)”。澳大利亚理论物理学家巴克斯特进一步利用该关系式求解了大量可积统计物理模型，其中尤其以

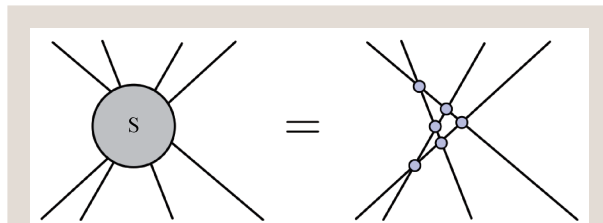


图3 一个复杂的散射过程分解为一系列两体散射过程

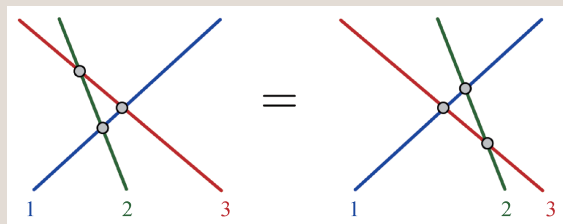


图4 散射分解的自洽性与杨—巴克斯特方程。图中直线表示粒子的世界线，取时间为纵轴方向(从下往上)，两线相交表示对应的两个粒子发生了散射。左图的散射过程为粒子1-2先发生散射，之后1-3散射，最后2-3散射；右图对应的散射过程为粒子2-3先发生散射，之后1-3散射，最后1-2散射

1972年求解八顶点模型最为著名^[4]。

(3) 杨—巴克斯特方程在量子场论中的应用最早源自前苏联理论物理学家 Alexei Zamolodchikov 和 Alexander Zamolodchikov 兄弟在1979年的开创性工作^[5]。

(4) 从1970年代末到1980年代，Ludwig Faddeev 领导的前苏联列宁格勒(现在的圣彼得堡)学派以杨—巴克斯特方程为核心开创了量子逆散射方法，开启了量子可积系统的新篇章。列宁格勒学派人才辈出，他们的工作对数学和理论物理都产生了深远影响。量子逆散射方法可以用于求解包括量子场论在内的各类可积系统，并且揭示了不同体系背后的共同代数结构。

(5) 1980年代中期，乌克兰数学家 Vladimir Drinfeld^[6]和日本数学家神保道夫(Michio Jimbo)^[7]基于杨—巴克斯特方程的研究独立提出量子群的概念，开创了代数学的一个新分支，至今依然是基础数学的重要研究领域。

回到可积量子场论的讨论上。自洽性条件告诉我们，可积量子场论的两体散射S-矩阵必须是杨—巴克斯特方程的解。数学家们对杨—巴克斯特方程进行了深入研究，并对各类可能的解进行了系统分类。因此，一旦知道了两体散射矩阵满足杨—巴克斯特方程，就可以利用已有的数学结果确定S-矩阵的形式。由理论的内禀对称性和杨—巴克斯特方程一般能够把S-矩阵的形式确定到只差一个或几个标量因子。么正性和交叉对称性则给出了这些标量因子满足的函数方程。

3.3 解析性与粒子谱

为了计算这些标量因子，我们需要求解函数方程，但这些函数方程的解不是唯一的。为了把解最终确定下来，还需要其他条件。这里的关键是利用S-矩阵的解析性质。将快度 θ 延拓到复平面后，S-矩阵的非解析点(极点、支点等)包含了理论粒子谱的重要信息。例如，一阶极点的位置通常与单粒子的质量密切相关，而支点位置往往对应于粒子对产生的能量阈值。因此，一个合理的假设是S-矩阵中所有非解析点都必须有物理解释。换句话说，找不到物理对应的非解析点是不允许存在的，这也叫做最大解析性假设。

在最大解析性假设的前提下，加上一些关于粒子谱的信息(一般源于对称性、微扰计算等)，在许多情况下可以完全确定两体S-矩阵的解析表达式。

3.4 剩余不确定度与无关可解形变

即使作了最大解析性假设，有时依然无法完全确定两体S-矩阵，因为我们总可以乘上一些解析函数(它们不引入额外的不解析点)。有一族解析函数自动满足么正性条件和交叉对称性，它们被称为 Castillejo—Dalitz—Dyson 因子，简称CDD因子。给定一个S-矩阵，乘上任意的CDD因子总可以得到另外一个在自举意义下“合法”的解，因此有时候CDD因子也被称为CDD不确定度。要消除这些不确定度一般还需要和微扰计算作进一步比对。近年来，基于二维量子场论可解形变的研究，人们开始逐渐理解CDD因子的物理含义。这些因子不改变场论在低能标区的性质，但是极大地改变场论在高能标区的行为。二维量子场论的可解形变也是当前理论物理研究的活跃前沿，感兴趣的读者可以查阅笔者的综述文章^[8]。

3.5 从S-矩阵到其他可观测量

S-矩阵是场论的重要可观测量，在高能物理的应用中尤为重要。在得到S-矩阵之后，可以以

此为基础计算其他物理量。例如，我们将1+1维场论定义在有限空间，此时时空拓扑是一个柱面，可以求解理论的有限尺度能谱。求解的方法称为热力学贝特拟设(thermodynamic Bethe ansatz, TBA)。该方法的基本思想是将柱面旋转 90° ，相当于将时间方向与空间方向互换，以此将一个有限尺度的问题转化为一个有限温度的问题。此时，有限尺度能谱的计算转化为有限温度下的自由能的计算，这就成了一个统计物理问题。类似的问题在1969年由杨振宁和杨振平先生提出的理论方法^[9]解决，该方法结合了贝特拟设与热力学的基本原理，因此被称为热力学贝特拟设。同样的思路可以用于求解场论的有限尺度能谱问题，这一推广是Alexei Zamolodchikov在1990年提出的^[10]。TBA方法是研究一般可积系统热力学，以及可积场论在不同能标下的行为的重要理论工具。

关联函数是场论的另外一类重要可观测量。在一般量子场论中，关联函数的非微扰计算是一个很困难的问题。在可积场论中，目前计算关联函数的最常用方法是所谓的形状因子(form factor)自举法。其基本思想是将关联函数展开为一系列形状因子，再通过自举方法来确定这些形状因子。该方法的基本思想发轫于1970年代Karowski和Weisz的工作^[11]，其后由Smirnov^[12]、Karowski和Babujian等人作了一系列重要推广。

4 从二维到高维

长期以来，可积性方法似乎被禁锢在1+1维时空的框架内。然而，过去20年的研究颠覆了这一认知——四维最大超对称杨—米尔斯理论($N=4$ supersymmetric Yang—Mills theory, 简称 $N=4$ SYM理论)的可积结构的发现，将可积性方法的疆域拓展到了高维时空。在此之后，另外几个重要的高维可积场论也相继被发现，包括2+1维时空的ABJM (Aharony—Bergman—Jafferis—Maldacena)理论，以及 $N=4$ SYM理论的若干可积形变如 β -形变、 γ -形变等。这些理论一般具有超对称性，并对偶于某些弯曲时空的量子引力理论。可积性方法在这些理论中的应用为人们求解高维量子场

论和量子引力理论提供了新的理论工具。

4.1 “21世纪的氢原子”

作为四维相互作用量子场论， $N=4$ SYM理论结构丰富，包含规范场、费米子场和标量场，可视为量子色动力学(描述自然界强相互作用的基本理论，简称QCD)的超对称扩展。从表面上看， $N=4$ SYM理论的作用量比QCD复杂不少，但它具有很高的对称性，包括：

(1) 共形对称性：理论在所有能标下保持形式不变；

(2) 最大超对称性：超对称允许费米子与玻色子相互转化， $N=4$ 超对称是四维场论允许的超对称性上限，包含16个超对称生成元。

此外，由于AdS/CFT对偶， $N=4$ SYM理论与反德西特空间(Anti-de Sitter, 一般简称AdS)中的IIB-型超弦理论严格等价，因此在强耦合极限可以利用超弦理论与超引力理论方法求解。这些特性使得 $N=4$ SYM理论有望成为首个可以非微扰求解的四维相互作用场论，因此该理论又被誉为“21世纪的氢原子”。这个比喻颇有深意。在20世纪，人们通过严格求解氢原子模型为定量研究原子内部结构提供了明确的理论指导，这为人类深入理解物质的内部结构奠定了坚实的基础。21世纪，我们期望对时空本身的结构有更深入的理解，如果能够像求解氢原子模型一样严格求解 $N=4$ SYM理论，将会大大增进我们对于时空的量子本质的理解，因此对该理论的求解具有深远的意义。

4.2 可积结构的发现

$N=4$ SYM理论可积结构的发现源于2002年前后的两个工作：

(1) 弱耦合端：瑞典乌普萨拉大学的Zarembo和Minahan发现，理论的伸缩算符(单圈修正)与海森伯自旋链(1928年提出，1931年由贝特严格求解，是著名的量子可积系统)在数学上同构^[13]；

(2) 强耦合端：加州大学的Bena、Polchinski和Roiban证明，对偶弦理论的世界面具有经典可

积性^[14]。

这些发现暗示： $N=4$ SYM理论可能在所有耦合强度下都具有可积结构，后续研究证实了这一猜想^[15]。

有些读者可能会困惑，Coleman—Mandula定理不是告诉我们高维相互作用场论不可能是可积的吗？那么，应该如何理解 $N=4$ SYM理论的可积性？这里需要区分两个概念。一个理论具有可积结构和这个理论本身是一个可积理论并不完全相同。有时，某个不可积理论可能在某个极限下具有可积结构，或者在计算某一类物理量时具有可积结构。在 $N=4$ SYM理论中，可积性确实存在于一个特殊的极限下，这个极限称为't Hooft极限，定义如下：令理论的杨—米尔斯耦合常数 g_{YM} 趋于无穷小，规范群的阶数 N 趋于无穷大，同时令 $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N$ 保持有限， λ 称为't Hooft耦合常数。在大 N 极限下，物理量可以按照 $1/N$ 作微扰展开，其中领头阶的结果就是't Hooft极限(又称为平面极限)的结果。 $N=4$ SYM理论的可积结构就存在于平面极限。此时理论等效于一个弦理论，真正可积的是这个弦理论的世界面，其上粒子之间的散射矩阵满足杨—巴克斯特方程。我们可以通过这个“隐藏”的低维可积系统来计算 $N=4$ SYM理论在大 N 极限下的各种物理量。

平面极限下的 $N=4$ SYM理论是一个特殊而丰富的可积系统，许多传统可积系统都可以在其中找到身影。当 $0 < \lambda \ll 1$ 时(称为弱耦合极限)，这个理论更像是一个可积自旋链。此时场论的许多计算可以转化为自旋链的计算，例如场论中算符的量纲计算可以转化为自旋链体系的能量的计算。而当 $\lambda \gg 1$ 时(称为强耦合极限)，这个理论更像是一个弦论。因为弦论的世界面是一个二维场

论，因此许多研究二维量子场论的方法可以应用于此。唯一不同的是，在光锥规范下，该弦论世界面上的二维场论不满足洛伦兹不变性，因此不是相对论性的，所以需要传统可积场论中的理论工具进行适当推广和改造。在强耦合极限下，场论的计算可以转化成弦论的计算。例如场论算符的量纲可以转化为弦的能量的计算。更为重要的是，有一些物理量能够在任意有限的 λ 精确计算，其中最重要的代表就是算符的共形量纲(conformal dimension)。利用2014年提出的量子谱曲线方法(quantum spectral curve)^[16]，已经能够高效地计算任意't Hooft耦合下的算符共形量纲，这充分显示了可积性方法的强大威力。

除了算符的量纲之外，其他关键物理量的计算也取得了重要突破。例如算符乘积展开(OPE)系数(包含理论的重要动力学信息)，以及散射振幅等。这些物理量的计算比算符的量纲要复杂得多，而且在传统可积性研究中没有对应的物理量，因此需要重新发展新方法。例如，三个单迹算符的OPE系数如果用弦论的图像描述，对应于一个闭弦演化为两个闭弦的几率幅；用自旋链的图像描述，则等价于把三个自旋链粘在一起，如图5所示。

这些量在传统可积性理论中几乎没有被研究过。当前OPE系数^[17]和散射振幅^[18]的计算方法主要是将这些物理量分解成为更基本的单元——称为形状因子——的无穷求和。这里的形状因子和二维可积场论的形状因子在概念上有一定的相似性，但也有本质不同。形状因子能够通过自举的方法完全确定下来，这部分结果是非微扰的。但是对于无穷多形状因子进行求和依然面临重大困难，只能在部分极限下才可以做到。

OPE系数中目前最有可能完全被精确计算出来的是笔者与小松尚太(Shota Komatsu)、Edoardo Vescovi在2019年提出的从两个巨引力算符(giant graviton)到一个单迹算符的OPE系数^[19]。此类OPE系数比较特殊，因为这个情形下，OPE系数恰好可以转化为一个传统可积场论中研究过的量——边界熵来计算。从弦论的角度来看，两个巨引力子算符对应于一个D-膜(在AdS空间中，该D-膜的世界线是一条一维测地线，该测地线与边

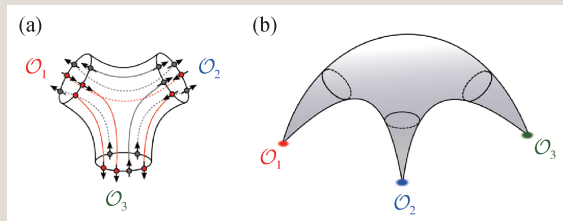


图5 单迹算符在弱耦合(a)与强耦合(b)极限下的物理图像，分别对应于自旋链与弦论的计算

界平直时空有两个交点，分别对应于两个巨引力子算符)，相关的 OPE 系数对应于这个 D-膜辐射一个闭弦的几率幅，如图 6 所示。

此时热力学贝特拟设方法提供了一个精确非微扰计算的框架，但是要真正实现对于任意单迹算符在任意耦合常数下的高效计算还有不少理论工作需要继续发展完善。

5 总结

作为现代理论物理的基石，量子场论在粒子物理、凝聚态理论等诸多领域取得了辉煌成就。虽然微扰计算方法成功解释了大量实验现象，但其固有局限性促使我们不断发展非微扰方法。在 1+1 维时空中，可积量子场论因其严格可解性而独具价值。可积性的约束使得多体散射分解为一系列两体弹性散射，结合么正性、交叉对称性、杨—巴克斯特方程和最大解析性假设，可非微扰地确定两体散射矩阵。从 S-矩阵出发，可以利用可积性方法严格计算能谱(热力学贝特拟设)、关联函数(形状因子方法)等关键物理量。

21 世纪初，随着 AdS/CFT 对偶的提出，人们发现一个四维相互作用场论—— $N = 4$ SYM 理论在平面极限下展现出可积结构。传统可积性方法经改造和推广后，能够计算任意耦合下的算符量纲，并在散射振幅与关联函数的非微扰计算上取得了重要发展。 $N = 4$ SYM 理论是一个极为丰富而又足够简单的理论，是第一个有希望被完全求解的高维相互作用的量子场论。目前看来，要实

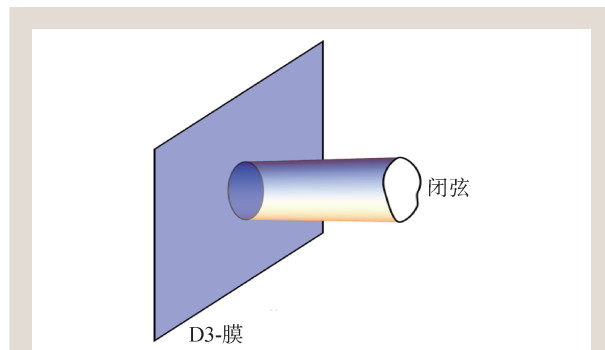


图 6 两个巨引力子算符与一个单迹算符的 OPE 系数，在弦论中对应于一个 D3-膜(具有三个空间维度的 D-膜)辐射一个闭弦的概率幅

现这个宏伟的愿景，任何单一的技术手段都不足以胜任，需要结合不同的思想与方法。例如，计算高点关联函数(例如四点函数)时共形自举方法能够发挥巨大的作用(详见周稀楠的文章^[2])；在强耦合区进行展开时往往得到渐近级数，此时需要利用复现理论进行分析，并从中提取非微扰贡献(详见顾杰的文章^[20])；而在非平面极限，即规范群的阶数 N 有限时，超对称局域化方法是当前为数不多的非微扰精确计算手段(详见张欣宇的文章^[21])。多种理论方法的综合应用和交叉验证，既为求解 $N = 4$ SYM 理论提供了不同视角，也加快了这些方法之间的融合发展。如果在不远的将来实现了，或者哪怕部分实现了这个愿望，也会深化我们对于非微扰量子场论的理解。在求解 $N = 4$ SYM 理论的基础上，我们可以尝试求解更一般的场论，包括具有更低超对称的理论、有限 N 情形以及与现实相关的量子色动力学等。

参考文献

- [1] Coleman S R, Mandula J. Phys. Rev., 1967, 159(5): 1251
- [2] 周稀楠. 物理, 2025, 54(6): 388
- [3] Yang C N. Phys. Rev. Lett., 1967, 19(23): 1312
- [4] Baxter R J. Annals of Physics, 1972, 70(1): 193
- [5] Zamolodchikov A B, Zamolodchikov A B. Annals of Physics, 1979, 120(2): 253
- [6] Drinfeld V G. Proc. ICM Berkeley, 1986: 798
- [7] Jimbo M. Lett. Math. Phys., 1985, 10: 63
- [8] Jiang Y. Commun. Theor. Phys., 2021, 75(5): 057201
- [9] Yang C N, Yang C P. J. Math. Phys., 1969, 10: 1115
- [10] Zamolodchikov A B. Nucl. Phys. B, 1990, 342: 695
- [11] Karowski M, Weisz P. Nucl. Phys. B, 1978, 139: 455
- [12] Smirnov F A. Adv. Ser. Math. Phys., 1992, 14: 1
- [13] Minahan J A, Zarembo K. JHEP, 2003, 03: 013
- [14] Bena I, Polchinski J, Roiban R. Phys. Rev. D, 2004, 69: 046002
- [15] Beisert N *et al.* Lett. Math. Phys., 2012, 99: 3
- [16] Gromov N, Kazakov V, Leurent S *et al.* Phys. Rev. Lett., 2014, 112(1): 011602
- [17] Basso B, Komatsu S, Vieira P. 2015, arXiv: 1505.06745
- [18] Basso B, Sever A, Vieira P. Phys. Rev. Lett., 2013, 111(9): 091602
- [19] Jiang Y, Komatsu S, Vescovi E. Phys. Rev. Lett., 2019, 123(19): 191601
- [20] 顾杰. 物理, 2025, 54(6): 404
- [21] 张欣宇. 物理, 2025, 54(6): 396