

自举思想在共形场论中的应用*

周稀楠[†]

(中国科学院大学 卡弗里理论科学研究所 北京 100190)

2025-04-07收到

[†] email: xinan.zhou@ucas.ac.cn

DOI: 10.7693/wl20250603

CSTR:32040.14.wl20250603

Bootstrap ideas in conformal field theories

ZHOU Xi-Nan[†]

(Kavli Institute for Theoretical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

摘要 “自举”最早起源于20世纪60年代对强子的研究,研究者试图仅通过系统的自洽性来定量地理解复杂的强相互作用。尽管这种尝试最终没能取得成功,自举的思想却被保留了下来,并逐渐发展为研究强耦合量子场论的一个重要工具。文章将简单介绍自举思想及其在共形场论研究中的一些应用。

关键词 自举, 自洽性, 共形场论, 非微扰, AdS/CFT 对应

Abstract The bootstrap idea originated in the study of hadrons in the 60's where researchers tried to derive a quantitative understanding of the complicated strong interaction from only consistency conditions. While this attempt failed, the bootstrap philosophy survived, and has now become a powerful way to understand strongly coupled quantum field theories. In this article, I will briefly discuss the ideas of bootstrap and their applications in studying conformal field theories.

Keywords bootstrap, self-consistency, conformal field theory, non-perturbative, AdS/CFT correspondence

1 引言:自然来源于自洽?

自举(bootstrap)一词来源于英文习语“Pull oneself up by one's bootstraps”,该习语的字面意思为通过靴筒上端的环状拉手把自己拉起来(尽管这显然违背力学原理),引申为不依赖外界帮助而实现某个目标。自举在物理学中的出现最早可追溯到20世纪60年代,当时在加速器中不断发现新的强子粒子,这给研究粒子理论的物理学家带来了极大的困惑:这些大量的粒子中究竟哪些才是最基本的?加州大学伯克利分校的物理学家

Geoffrey Chew提出了一个相当激进的观点,他认为所有的强子粒子都同样基本,并且其背后的相互作用规律可以完全通过自洽性要求推断出来。按照Chew的设想,每个粒子都可被看作其他粒子的复合体,同时通过交换这些粒子本身来传递相互作用。由此形成的逻辑闭环要求相互作用的规则并不是任意的而必须满足一定的自洽性条件。Chew认为这种自洽性最终决定了相互作用的规则以及粒子的性质。正如他写道的,“自然之所以是我们所看到的样子,是因为这是唯一自相融洽的自然”^[1]。换言之,自然来源于自洽。借用本段开头的习语,Chew将这种研究粒子物理的方法称之为“自举”。值得注意的是,这种方法与自古希

* 国家自然科学基金(批准号:12275273)资助项目

古希腊哲学家德谟克利特以来主导西方科学的“还原论”思想有很大的区别。自举强调以一种整体的观念来看待和研究自然，而不是试图将其分解到无法进一步解释的基本单元。

更具体地，Chew的自举方法着眼于所谓的S-矩阵。这一最早由海森伯提出的物理量(S代表散射的英文 scattering)，描述了不同入射态在散射实验中对应到不同出射态的几率。为了得到S-矩阵，自举方法要求S-矩阵满足一些基本的自洽性条件。这包括时空的庞加莱对称性、概率的守恒(么正性)，以及其他一些S-矩阵较为普适的解析性质。这种自举方法在早期研究中的确取得了一些成功，比如对 ρ 介子质量的正确预言。相比之下，同一时期还在发展中的量子场论仍面临着不少技术和概念上的困难。这使得Chew在1968年仍乐观地预测自举方法将成为领域未来的主流，而局域场论的方法则将逐渐失去吸引力^[1]。然而历史与Chew的希望恰恰相反，强子自举的方法并没能实现预期的进展，并最终被粒子物理学界所抛弃^{[2]1)}。而量子场论框架下的量子色动力学后来居上，成为了解释强相互作用的主流理论。

2 共形自举的诞生

尽管Geoffrey Chew关于自举方法的设想没能在强子研究中实现，其思想却在20世纪70至80年代被借鉴到了共形场论(conformal field theory, CFT)的研究中，并在二维时空的情形中取得了很大的成功。

共形场论是一类在所谓共形变换的时空变换下保持不变的量子场论。共形变换保持角度不变(图1，注意网格线在变换后仍以直角相交)，从而推广了仅保持长度不变的旋转变换和平移变换(庞加莱对称)。这些变换的一个特例是尺度变换，即 $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$ 。该变换下的不变性要求理论不具备任何内禀的尺度(能量、质量、长度)，因此理论中不能存在粒子而只有连续的能谱。粒子概念的缺乏

让我们无从讨论散射，但仍可以在不同时空点插入局域算符(比如能量密度算符)，并研究这些算符所对应的物理量涨落之间的关联。这种关联被称为关联函数，并可被粗略地视为散射振幅的对应。

共形场论在物理中有着重要且广泛的应用。一方面，共形场论可以被抽象地想象成在包含了所有量子场论的理论空间中的“灯塔”。在这一空间中，量子场论通过所谓重整化群流被联系，这些流告诉了我们量子场论是如何随研究尺度而变化的。因为没有内禀尺度，共形场论处在重整化群流的终点。而这些流可以相互汇聚，从而形成一个复杂的网络(图2)。因此，作为理解所有量子场论的第一步，我们首要的目标是理解这些处于特殊点的共形场论。另一方面，共形场论在现实生活中其实并不陌生，因为它们描述了各种微观体系在发生二级相变时的临界行为。比如，在图3所示的水的相图中，分隔气相和液相的一级相变线终止于一个二级相变点，而该点的物理可以由一个共形场论来刻画。共形场

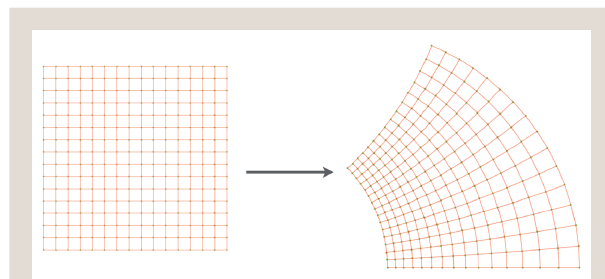


图1 共形变换

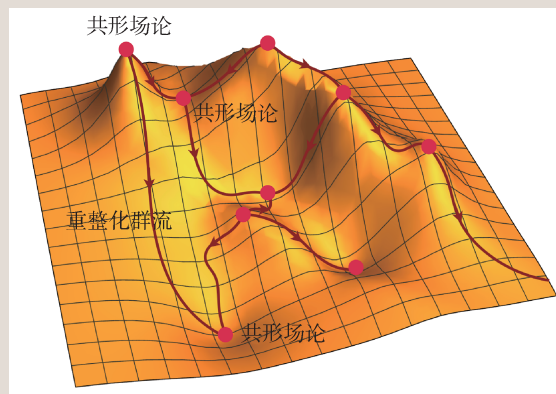


图2 量子场论空间中的重整化群流

1) 然而S-矩阵自举的研究却意外导致了弦理论的诞生，后者在随后的几十年内彻底改变了高能理论物理领域的面貌。1968年，Gabriele Veneziano发现了一个以他名字命名的散射振幅公式。该公式蕴藏了弦的特征，从而拉开了弦理论研究的序幕。对于历史感兴趣的读者可以阅读John Schwarz的一篇短文^[2]。

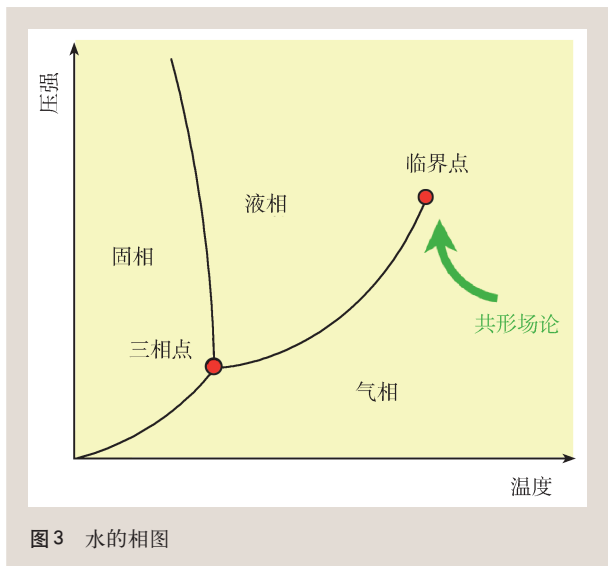


图3 水的相图

论虽然具有重要的意义，但它们一般是一些相互作用很强的理论，即所谓的强耦合理论。这意味着我们无法把相互作用看作微小的扰动从而用微扰论的方法来处理。事实上，非微扰手段的缺乏使得我们在一般情况下很难去具体地研究这些强耦合理论。

20 世纪 70 年代，两组研究者 Sergio Ferrara、Raoul Gatto、Aurelio Grillo^[3](意大利)和 Alexander Polyakov^[4](前苏联)独立地尝试将自举思想应用到共形场论的研究中。类似于拉氏量中粒子的质量项和三粒子相互作用，在共形场论中有两点 and 三点关联函数：

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}(x_1) \mathcal{O}(x_2) \rangle &= \frac{1}{x_{12}^{2\Delta}}, \\ \langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \mathcal{O}_3(x_3) \rangle &= \frac{C_{ijk}}{|x_{12}|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |x_{13}|^{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2} |x_{23}|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1}}.\end{aligned}$$

可以证明，两点函数和三点函数的形式完全由共形对称性决定。其中 Δ_i 被称为算符的共形维数，描述了算符在尺度变换下的变化，而三点函数系数 C_{ijk} 则刻画了三个算符之间的相互作用。共形对称性所导致的另一重要结果是算符乘积展开 (operator product expansion, OPE)，即两个不同时空点上的算符的乘积可以被表示为一系列新的算符的和。我们可以粗略地将其写成：

2) 这实际上也等价于约化到三点函数。

$$\mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) = \sum_j C_{12j} D_{12j}(x_1, x_2, x_3, \partial_{x_3}) \mathcal{O}_j(x_3),$$

其中 $D_{12j}(x_1, x_2, x_3, \partial_{x_3})$ 是一个由共形对称性决定的微分算符。OPE 是共形场论中算符的一个非常有用的性质，因为它给出了一种计算更高点关联函数的方法。由于每次 OPE 的使用都使关联函数中减少了一个算符，可以反复使用 OPE 将任意点的关联函数不断约化，一直到被对称决定的两点函数的情形²⁾。由此我们可以看到，算符维数 Δ_i 和三点函数系数 C_{ijk} 原则上决定了共形场论中的所有关联函数。因此，这些数的集合 $\{\Delta_i, C_{ijk}\}$ 一般也被称为共形场论数据 (CFT data)，包含了定义一个共形场论所需的全部信息。

这里我们可以发现一个有趣的现象：即使对于四点函数的约化计算，进行 OPE 时选取算符的方式也并非唯一。比如，可以对 12 和 34 分别做 OPE，但也可以对 14 和 23 分别做 OPE。而自洽性要求两者必须给出同样的结果。这可以粗略地写成：

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \mathcal{O}_3(x_3) \mathcal{O}_4(x_4) \rangle &= \\ \langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \mathcal{O}_3(x_3) \mathcal{O}_4(x_4) \rangle.\end{aligned}$$

其中蓝色线表示在做 OPE 时所选取的算符。更具体地，可将其写作：

$$\sum_{\mathcal{O}} C_{12\mathcal{O}} C_{34\mathcal{O}} \begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mathcal{O} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \end{array} = \sum_{\mathcal{O}'} C_{14\mathcal{O}'} C_{23\mathcal{O}'} \begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mathcal{O}' \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \end{array}.$$

这里每一个图被称作一个共形模块 (conformal block)，代表了通过 OPE 交换某个算符对四点函数的贡献。这一等式被称作交叉方程 (crossing equation)，实质上反映了 OPE 的结合律。由此可以看到，定义理论的共形场论数据并非随意选取，而是需要满足交叉方程所施加的非平凡限制。而试图通过利用共形对称性和自洽性来直接解出共形场论的方法被研究者称为共形自举 (conformal bootstrap)。

在 1984 年的一篇著名论文中，Belavin、Polyakov 和 Zamolodchikov^[5] 首次真正实现了共形自举，从而非微扰地解出了无穷多的所谓“最小模

型”(minimal models)的共形场论。然而,这一成功的一个关键要素是时空必须是二维的。利用复坐标 z 来描述二维平面,任何亚纯函数 $z \rightarrow f(z)$ 都构成二维的共形变换,但只有具备 $z \rightarrow (a+bz)/(c+dz)$ 形式(且 $ad-bc=1$)的特例才是高维时空中共形变换的对应。换言之,共形对称在二维中会被拓展成具有无穷多生成元的Virasoro代数。而正是因为这种更强对称性的存在,更多的算符被联系起来,从而将共形自举归为一个只包含有限个变量的可以求解的问题。虽然这一突破性的工作证明了共形自举作为一种非微扰方法的有效性,但是其中用到的特殊的无穷对称使得共形自举在高维时空中的推广仍然看来遥不可及。

3 高维时空中的共形场论自举

经过20世纪80年代的研究高潮后,共形自举也与S-矩阵自举一样逐渐淡出了人们视线,直到2008年才重新焕发出生机。此时希格斯粒子尚未被实验发现,在瑞士和意大利的一组研究者Rattazzi、Rychkov、Tonni和Vichi试图考察一种利用共形场论来替代希格斯粒子的理论可能^[6]。这一研究的动机是解决所谓的希格斯粒子质量的等级问题(hierarchy problem)。通过综合共形场论和Technicolor模型中的“行走行为”(walking behavior),Rattazzi和Rychkov等人所研究的模型可以为解决等级问题提供新思路。但是这一机制的实现要求共形场论满足极为特殊的条件^{[7]3)}。有意思的是,这一出于粒子物理唯象学动机的工作却发明了一种具有更广泛应用的研究共形场论的新型数值方法。某种程度上,或许也正是这种唯象学的视角为共形自举的研究思路提供了关键的突破。

为了解释其原理,我们具体考虑一个具有同样标量算符 ϕ 的四点函数,并把交叉方程更准确

地写成:

$$\sum_{\phi} C_{\phi\phi\phi}^2 V^{d_{\phi}} g_{d,l}(U, V) = \sum_{\phi} C_{\phi\phi\phi}^2 U^{d_{\phi}} g_{d,l}(V, U),$$

其中共形模块 $g_{d,l}$ 代表了交换算符贡献,具体依赖于四点坐标的特定组合:

$$U = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}, \quad V = \frac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}.$$

为了明确起见,除了共形维数 d 还标出了交换算符的自旋 l 。由于外点算符相同,交叉方程中OPE系数的乘积变成了简单的平方。进一步改写,可以得到:

$$1 = \sum_{d,l} C_{\phi\phi\phi}^2 F_{d,l}(U, V),$$

$$F_{d,l}(U, V) = \frac{V^{d_{\phi}} g_{d,l}(U, V) - U^{d_{\phi}} g_{d,l}(V, U)}{U^{d_{\phi}} - V^{d_{\phi}}}.$$

在第一个方程的左边特意分离出了来自恒等算符的贡献,该算符总是出现在两个同样算符的OPE中。方程的这一形式使我们更容易看出其中所包含的限制的无穷性。当移动算符来改变 U 和 V 的取值时,交叉方程会给出关于OPE系数平方的不同的线性限制。

Rattazzi和Rychkov等人方法的关键是采取了一种粒子物理研究中常见的排除法思路:虽然我们无法直接求解CFT数据,但是否能至少排除其中不可能的取值?而决定一组数据是否可能的自洽性判据正是交叉方程。为了直观地看到这一点,我们不妨采用以下的几何视角。如果将每个 $F_{d,l}(U, V)$ 看作无穷维函数空间中的一个向量,那么交叉方程要求恒等算符以外的所有向量之和等于一个特殊的固定向量1。同时我们注意到每个向量都具有非负的系数 $C_{\phi\phi\phi}^2$,这一性质来源于理论的么正性(即概率守恒),要求了所有OPE系数 $C_{\phi\phi\phi}$ 都为实数。如此一来,当变化 $C_{\phi\phi\phi}$ 的取值时,这些向量的线性组合在空间中构成一个凸锥(convex cone)。凸锥的形状既依赖于所交换的算符维数也取决于 U 和 V 的取值。于是对于交叉方程我们有图4中所示的三种逻辑可能。在情况

3) 更具体地说,为了与粒子物理标准模型的结果符合,所涉及的Conformal Technicolor模型^[7]要求希格斯粒子的质量量纲接近自由标量粒子(为1),但希格斯粒子与其自身形成的复合粒子的质量量纲则具有非常大的反常量纲(接近4)。这一点在很大程度上是与直觉相矛盾的,因为严格自由的标量粒子所形成的复合粒子具有量纲2。但是Conformal Technicolor模型设想某种强耦合效应或许可以实现这一情形。Rattazzi和Rychkov等人工作的出发点就是寻找一种严格的非微扰的方法来验证这一设想在物理上是否可行。

图4(a)中, 固定向量位于锥的内部, 此时交叉方程有解。在情况图4(b)中, 固定向量处于锥的外部, 因此交叉方程无解。最后在情况图4(c)中, 固定向量位于锥的边界, 这时交叉方程处于有解的临界情形。由此有了以下的假设—排除方法: 作为假设先对CFT数据取某些特定的值, 然后遍历所有的 U 和 V 取值。此时交叉方程有解尚不能说明太多问题, 但如果方程无解则说明基于假设数据的共形场论没有办法满足自洽条件, 因此我们可以排除关于CFT数据所取的这一假设。之后我们可以不断重复这个过程, 从而在CFT数据的空间中逐步排除掉无法构成自洽理论的部分。这一基本思路可以被进一步有限化, 并转化成一个半正定规划问题(semidefinite programming), 从而在计算机上高效地执行。特别的, 我们可以在 $(\Delta_{\min}, \Delta_\phi)$ 这一CFT数据的子空间中做排除法, 并对其他数据只作一般的么正性要求。这里 $\Delta_{\min}$ 为被交换的标量算符所能取的最低共形维数。Rattazzi和Rychkov等人在工作中证明了利用上述

数值方法可以给出关于不同 Δ_ϕ 的取值 $\Delta_{\min}$ 的上界, 从而首次在高维的共形场论中仅利用自洽性条件得到非平凡的结果。

Rattazzi和Rychkov等人的工作掀起了一股持续至今的共形自举研究热潮。其中最具代表性的结果是三维伊辛模型(Ising model)的精确求解。2012年, 数值共形自举的方法被应用到三维空间中^[8]。该工作显示共形自举将 $(\Delta_{\min}, \Delta_\phi)$ 平面分成了“允许”和“排除”两个区域(图5)。这两个区域的分界线几乎到处光滑, 但在(1.41, 0.51)这个点附近出现了一个明显的转折。存在这一转折点最可能的解释是其附近存在着一个真实的理论, 因此对其邻近区域的排除构成了阻碍。这一猜想也被蒙特卡罗模拟结果所支持, 因为转折点所对应的共形维数与所谓的三维伊辛模型中的结果极为接近。在此基础上, 研究者进一步考虑了一个更大交叉方程系统的自举。除了 ϕ 算符, 我们还可以加入对应 $\Delta_{\min}$ 的算符, 并考虑由此构成的所有四点函数的交叉方程^[9]。这一体系显然包含了更多的限制, 并将可能的共形维数区域进一步缩小到一个包含三维伊辛模型的小岛(图5)。这里我们需要特别强调这种基于假设—排除的算法与生俱来的特点。利用这种方法得到的所有估计的上下限都是严格的, 而这是蒙特卡罗模拟等其他数值方法所不具备的优势。事实上, 数值共形自举方法是如此的有效, 以至于可能存在理论参数区域被压缩到一个极小的范围^[10, 11]。由此得到的

对算符共形维数的估计在精度上远远超过了蒙特卡罗⁴⁾。值得一提的是, 三维伊辛模型与之前提到的水的临界点处于同一个所谓的临界普适类, 即两者可由同一个共形场论来描述。因此, 至少在这个例子中, Geoffrey Chew的“自然来自自洽”的设想得到

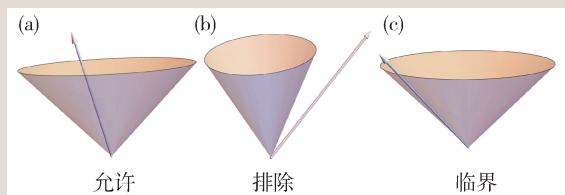


图4 交叉方程对应的几种情况 (a)固定向量位于凸锥内部, 方程有解; (b)固定向量位于凸锥外部, 方程无解; (c)固定向量位于凸锥表面, 方程有解

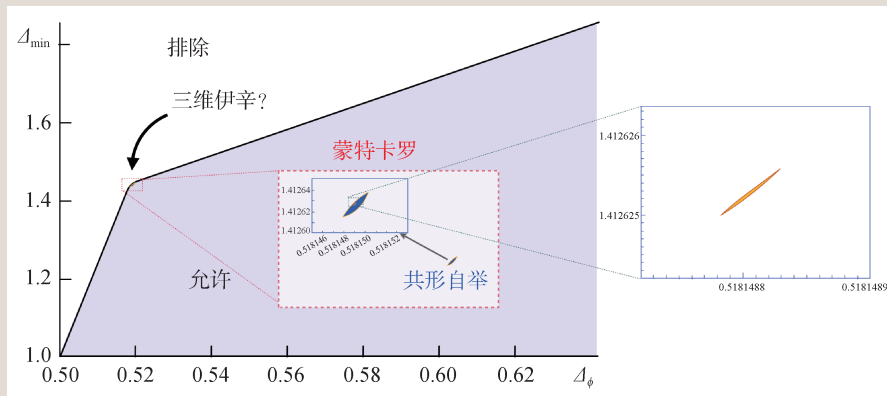


图5 数值共形自举求解三维伊辛模型的结果示意图(图片改编自文献[8, 10, 11])

4) 共形自举目前得到的 $\Delta_{\min}$ 和 Δ_ϕ 最精确的估计值分别为1.41262528(29)和0.518148806(24), 远优于由蒙特卡罗得到的1.41265(13)和0.518142(20)。这一精度的提升得益于在交叉方程系统中进一步加入应力—能量张量这一普遍出现的算符^[11]。

了完美的实现！目前高维共形场论的研究已经发展成了一个很广泛的领域。感兴趣的读者可以参照相关综述^[12–15]来进一步了解这一领域在不同方面的进展^{[16–21] 5)}。

4 自举方法在全息共形场论中的应用

那么自举到底是什么？尽管上述例子细节不一，但我们不难找到其中的共同之处。不妨把Geoffrey Chew最初的强子自举的设想理解成一种更为广泛的思想，并把所有试图通过对称性和自治性等限制来直接求解物理量的方法称之为自举。在这种广义理解下，接下来我们将考虑其思想在共形场论关联函数解析计算中的应用。

前面已经提到，共形场论作为强耦合理论一般难以通过解析的手段来精确研究，然而一个重要的例外是1997年Juan Maldacena提出的AdS/CFT对应^[22]（其他非微扰的解析工具包括可积性方法、复现方法以及超对称局域化方法，这些方法分别在本刊江云峰、顾杰和张欣宇的文章中有详细介绍^[23–25]）。该对应指出了一大类共形场论可以被完全等价地看作更高维时空中的量子引力理论。这里更高维的时空是所谓的反德西特(anti de Sitter, AdS)空间(图6)。这是一种具有恒定负曲率的时空并具有一个边界，而等价的共形场论正位于这一边界上。这种将高维体系的信息等价地储存在低维体系的机制与全息相片颇为相似，因此AdS/CFT对应也被称为全息对偶。

AdS/CFT对应的最经典的一个例子是四维 $N=4$ 超杨—米尔斯理论和 $AdS_5 \times S^5$ 空间中IIB超弦理论的对应。前者是描述强相互作用的量子色动力学的一个理想化翻版，在时空的庞加莱对称外还具备了大量联系起玻色子和费米子的超对称。这使得原本渐进自由的理论不再随尺度的变化而改变，从而成为一个超对称共形场论。对应中的后者则是超弦理论中的一种，并处在一个具有特

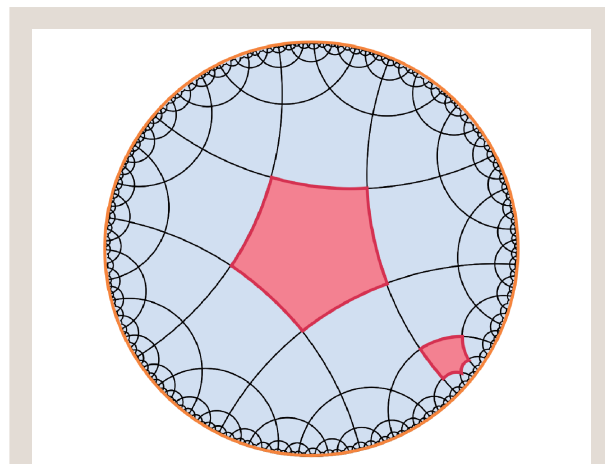


图6 AdS空间示意图。该空间存在一个位于无穷远处的边界(橙色)。在这一示意图中，越靠近边界距离越被压缩，这可以从两个相同的五边形(红色)的不同表现大小看出来

殊直积形式的十维空间。这个空间的两部分分别是一个五维的AdS空间和一个五维的球面。这个典型的例子很好地展示了AdS/CFT对应的一个重要特点：对应中两种对偶的描述可以将强弱耦合互相转化。具体来说，当 $N=4$ 超杨—米尔斯理论处于弱耦合时，我们可以直接用量子场论中的费曼图方法来微扰地研究。而在微扰方法失效的强耦合情形，AdS/CFT对应告诉我们该理论等价于 $AdS_5 \times S^5$ 空间中弱耦合的超引力(超弦理论的低能极限)⁶⁾。因此原则上我们又可以重新使用微扰论(尽管是在弯曲时空中的)来解析地研究强耦合的量子场论。作为最基本的可观测量，共形场论中的关联函数全息地等价于AdS空间中的散射振幅，如图7所示。在这一示意图中，我们在较早时间插入的算符位置上引入了AdS空间中场的扰动。扰动所形成的波包向AdS空间的内部传播，最终相遇并相互散射。出射的波包被更晚时间插入的算符所探测，这一过程测量到的散射振幅正对应了共形场论中的关联函数。我们在共形场论的讨论中已经看到关联函数具有最基础的重要性，而这一点从对偶的描述中也不难看出。在AdS空间

5) 除了数值方面的发展外，目前对于共形自举的解析研究也有不少重要的进展。这包括光锥共形自举(lightcone conformal bootstrap)^[16, 17]，大自旋微扰理论(large spin perturbation theory)^[18]，洛伦兹反演公式(Lorentzian inversion formula)^[19]，Polyakov—Mellin自举^[20]和解析泛函方法(analytic functional method)^[21]。对其中部分进展的介绍可以参考近期一篇关于解析共形自举的综述^[15]。

6) 准确来说，这要求我们取一个所谓的't Hooft极限，此时需要让超杨—米尔斯理论中规范群的秩 N 趋于无穷（在量子色动力学中 $N=3$ ）。

中关联函数的测量被转化成一个粒子对撞的思想实验，而在粒子对撞实验中人们所能测量的正是散射振幅。

正如平直空间中散射振幅可以由费曼图计算得到，AdS 空间中的振幅也可以由类似的所谓 Witten 图来计算。这种基于 Witten 图展开的方法是研究这些全息关联函数最传统的策略。这一策略可以分成以下三步。首先，需要掌握所有的费曼规则。这包括了告诉我们粒子如何自由传播的传播子(格林函数)，以及描述粒子相互作用的顶点。然后，列出某一过程中所有可能贡献的图。

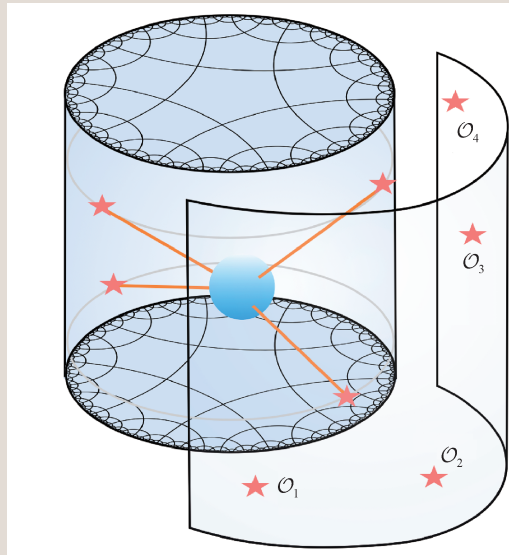


图7 AdS/CFT 对应示意图。这里我们强调了时间方向(沿着圆柱的方向向上)，圆柱的表面代表了共形场论存在的时空，内部表示 AdS 时空。在圆柱表面上插入的算符的关联函数对应了发生在内部的散射振幅

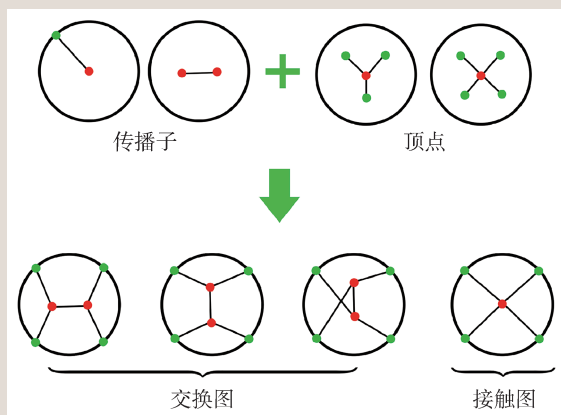


图8 AdS 空间中的 Witten 图。传播子和顶点给出了基本的规则并可被用来构造一般的 Witten 图

在这里我们将注意力集中于四点函数，并只考虑具有树状结构的 Witten 图(具有圈状结构图的贡献在超引力极限下是次要的)。可能的图可以被分成交换图和接触图，如图 8 所示。最后，计算所有这些 Witten 图并把结果相加得到全息关联函数。

这一方案看似简单直接，但在实际操作中却遇到了极大的困难。事实上，从 AdS/CFT 对应发现起的近 20 年内，文献中只有屈指可数的全息关联函数被具体计算。这些困难包含了以下的几方面。首先，与 20 世纪 60 年代强子散射的处境类似，这些全息理论中也包含了无穷多的粒子，粒子的无穷性来源于所谓的 Kaluza—Klein 约化。简单来说，在这一散射实验中我们只能直接看到 AdS 这一因子，而看不到内在的五维球面。一个十维空间中的粒子可以在内部空间有无穷种不同的运动模式，这在低维的 AdS 观测者看来对应了不同质量的粒子。其次，因为有无穷多的粒子，其相互作用是极其复杂的。事实上，为了计算一般的树图阶的四点函数，需要整整 15 页的费曼规则来描述其中的相互作用！而当我们考虑更重的粒子作为散射过程的外点时，需要计算的 Witten 图的数目也随着外点质量迅速且无限制地增加。这对于上述的图展开方法显然不是一个好消息。最后，弯曲的时空也使得图的计算更加困难，最终得到的结果看上去非常复杂且难以进一步简化。

如何高效地计算全息关联函数这个基本问题一直困扰了研究者近 20 年。虽然这一问题弱耦合的，但事实证明采取自举思想来处理该问题具有出人意料的优势。在 2016 年，笔者和 Leonardo Rastelli 引入一种融入了自举思想的新方法，并成功得到了所有树图阶的四点函数^[26]。首先，我们对全息关联函数做了所谓的 Mellin 变换，并在变换后的空间内考察这些关联函数。这是一种 Gerhard Mack 在 2009 年引入的框架^[27]，其优点是变换后的关联函数(Mellin 振幅)具有与平直时空的动量空间中振幅类似的解析性质。然后，与 Chew 的 S-矩阵自举类似，我们列出 Mellin 振幅所需要满足的限制条件。这包括了理论的超共形对称性，以及振幅在粒子交换顺序下不变的交叉对称性。同时，单个 Witten 图的解析结构(但无需知道其振

幅的具体细节)给出了Mellin振幅的一般解析行为(具有单极点并具有多项式留数)。另外,我们还可以推定Mellin振幅在高能极限下的行为。这是因为取高能极限等价于在极小的尺度下考察AdS空间,而此时曲率并不可见因而时空接近平直。所有的这些限制都可以在Mellin空间下表述,并将全息关联函数的计算转化成了一个在多重限制下求解Mellin振幅的代数问题。我们可以关于任意算符统一地求解这个问题,最后发现该问题的解出人意料地简单:所有无穷多的树图阶四点函数的Mellin振幅只需要短短的一行就可以写下!

这个例子充分凸显了自举方法的优越性。尽管全息关联函数的计算在微扰量子场论的描述下显示出令人绝望的复杂性,但自举方法揭示了其中隐藏的巧妙及简洁性。值得注意的是,对于这种自举方法而言,Witten图的计算完全是多余的,因此我们不必事先知道这些无穷多粒子是如何相互作用的。相反,从由自洽性确定的结果中我们可以反推出AdS空间中粒子作用的细节。读者不难发现,这种全息关联函数的自举方法事实上与Geoffrey Chew关于强子自举最初的设想十分类似。

我们在这里所展示的这一成功案例也并非巧合,这种自举的思路同样适合于其他的理论以及更复杂的全息关联函数(比如更多的算符、圈图阶

的修正)。除了作为强耦合量子场论中重要的可观测量,我们还提到了全息关联函数具有AdS空间中散射振幅的对偶解释。因此在考虑上述的引力子散射之外,还可以同样使用自举方法去考虑AdS空间中胶子的散射^[28]。由此可以进一步去探索平直空间中“双重复制”关系等振幅的深刻性质的推广^[29],从而试图去建立一套弯曲时空中的散射振幅理论。我们将不再具体展开这些拓展,推荐感兴趣的读者参考前几年的一篇综述^[15]来获得更深入的了解。

5 总结与展望

在本文中,我们看到了自举这一思想在高能理论物理中(特别是共形场论中)的一些应用。抛开具体的细节,可以看到自举思想的核心不过是利用自洽性的限制来求解问题。从这个角度来说,甚至我们在初等数学中接触到的“待定系数法”都可以看做是自举的一种形式。在引言中提到了由拉氏量出发的量子场论等方法遵循着物理学中一直以来的“还原论”的思想,而强调整体的自举思想则与之成了很好的互补。因此,在高能理论物理的研究中恰当地融入一些自举的元素或可以为解决问题带来一些意想不到的好处。

参考文献

- [1] Chew G F. *Science*, 1968, 161: 762
- [2] Schwarz J. 2012, arXiv: 1201.0981
- [3] Ferrara S, Grillo A F, Gatto R. *Annals. Phys.*, 1973, 76: 161
- [4] Polyakov A M. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 1974, 66: 23
- [5] Belavin A A, Polyakov A M, Zamolodchikov A B. *Nucl. Phys. B*, 1984, 241: 333
- [6] Rattazzi R, Rychkov V S, Tonni E *et al.* *JHEP*, 2008, 12: 031
- [7] Luty M A, Okui T. *JHEP*, 2006, 09: 070
- [8] El-Showk S, Paulos M F, Poland D *et al.* *Phys. Rev. D*, 2012, 86: 025022
- [9] Kos F, Poland D, Simmons-Duffin D. *JHEP*, 2014, 11: 109
- [10] Kos F, Poland D, Simmons-Duffin D *et al.* *JHEP*, 2016, 08: 036
- [11] Chang C H, Dommes V, Erramilli R S *et al.* *JHEP*, 2025, 03: 136
- [12] Rychkov V S. *EPFL Lectures on Conformal Field Theory in D≥3 Dimensions*. Springer Briefs in Physics, 2017
- [13] Simmons-Duffin D. 2016, arXiv: 1602.07982
- [14] Poland D, Rychkov V S, Vichi A. *Rev. Mod. Phys.*, 2019, 91: 015002
- [15] Bissi A, Sinha A, Zhou X. *Phys. Rept.*, 2022, 991: 1
- [16] Fitzpatrick A L, Kaplan J, Poland D *et al.* *JHEP*, 2013, 12: 004
- [17] Komargodski Z, Zhiboedov A. *JHEP*, 2013, 11: 140
- [18] Alday L F. *Phys. Rev. Lett.*, 2017, 119(11): 111601
- [19] Caron-Huot S. *JHEP*, 2017, 09: 078
- [20] Gopakumar R, Kaviraj A, Sen K *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2017, 118(8): 081601
- [21] Mazac D, Rastelli L, Zhou X. *JHEP*, 2021, 08: 140
- [22] Maldacena J M. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 1998, 2: 231
- [23] 江云峰. *物理*, 2025, 54(6): 380
- [24] 顾杰. *物理*, 2025, 54(6): 404
- [25] 张欣宇. *物理*, 2025, 54(6): 396
- [26] Rastelli L, Zhou X. *Phys. Rev. Lett.*, 2017, 118(9): 091602
- [27] Mack G. 2009, arXiv: 0907.2407
- [28] Alday L F, Behan C, Ferrero P *et al.* *JHEP*, 2021, 06: 020
- [29] Zhou X. *Phys. Rev. Lett.*, 2021, 127(14): 141601