

化繁为简的局域化方法*

张欣宇[†]

(浙江大学物理学院 浙江近代物理中心 杭州 310058)

2025-04-07收到

[†] email: xinyu.zhang@zju.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20250604

CSTR:32040.14.wl20250604

Localization methods: simplifying complexity

ZHANG Xin-Yu[†](Zhejiang Institute of Modern Physics, School of Physics, Zhejiang University,
Hangzhou 310058, China)

摘要 量子场论的微扰论方法在解释物理学中的许多重要现象时面临失效的困境,而目前尚没有分析非微扰效应的一般理论框架。超对称的引入为突破这一瓶颈提供了关键路径。局域化方法充分利用超对称的特性,将无穷维泛函积分约化为方便处理的有限维积分、离散求和或矩阵积分,成为非微扰计算的核心工具。文章简要介绍局域化方法的基本思想,梳理该方法的发展脉络,揭示其在物理与数学交叉领域的深远影响。

关键词 局域化, 超对称, 非微扰效应

Abstract Perturbative methods in quantum field theory often encounter limitations in explaining many crucial physical phenomena. Moreover, there remains a lack of general theoretical frameworks for analyzing non-perturbative effects. The introduction of supersymmetry provides a critical pathway to overcome this bottleneck. Leveraging the unique properties of supersymmetry, localization methods reduce infinite-dimensional functional integrals to manageable finite-dimensional integrals, discrete summations, or matrix integrals. This development has established localization methods as a cornerstone tool for non-perturbative computations. This article provides a concise overview of the fundamental principles of localization methods, traces their historical evolution, and highlights their profound implications at the intersection of physics and mathematics.

Keywords localization, supersymmetry, nonperturbative effects

1 引言

20世纪初,伴随着相对论与量子力学的诞生,物理学的发展开启了崭新的一页。作为狭义相对论与量子力学完美融合的产物,量子场论被广泛应用于粒子物理学、核物理学、凝聚态物理学、宇宙学等各个领域,取得了一系列令人瞩目的成功。

对于绝大多数量子场论系统,关联函数或散射振幅等物理量都无法精确地求解。针对这样的处境,物理学家们有历史悠久的传统,即利用微扰论的框架,将拉格朗日量分解为“可严格求解”的部分和“扰动”的部分,物理量的理论预言表达为渐近幂级数的形式。对于量子场论,原则上这一级数的各项都可以通过费曼图进行计算。事实上,这种传统方法在处理许多问题时与实验结果惊人地一致,量子场论也因此被普遍认为是物理学史上最成功、最精确的理论之一。

* 国家自然科学基金(批准号:12475073)资助项目

遗憾的是，微扰论的方法并非是万能的，尤其是当物理现象涉及强耦合过程、相关物理量缺乏合适的展开参数或真空包含复杂拓扑结构时，微扰论方法不再有效。著名的例子包括夸克禁闭现象、强子质量来源、分数量子霍尔效应等。为了揭示这些现象背后的物理机理，必须发展超越传统方法的非微扰理论框架。这是当前理论物理研究的一个核心挑战。针对一些特殊情况，人们发展出了可积性^[1]、自举^[2]、复现^[3]等多种方法，但到目前为止依然没有在普适性和可操作性上同时满足需求的理论框架。

不过理论物理学家们并没有就此止步不前。人们很早就发现，当量子场论额外具有超对称时，问题往往呈现出简化的结构。不同于已经在自然界中被发现的其他对称性，超对称构建了玻色子与费米子之间的联系。超荷(也即超对称的生成元)之间的代数结构通过反对易子而非通常的对易子加以描述。超对称量子场论比一般量子场论更易求解的根源来自两个方面：(1)在很多问题中，配对成超对称伙伴的玻色态与费米态的贡献相互抵消，使得微扰计算比通常的情况简单得多；(2)与此同时，超对称对其保护的物理量允许的非微扰效应的类型形成严格约束，对应的场构型所满足的方程往往从通常的二阶偏微分方程简化为一阶偏微分方程。这种源自于超对称代数结构的简化最终引导研究者提出和发展了在超对称理论中的局域化方法。在路径积分表述中，其效果在于将原本无穷维的泛函积分问题约化为有限维的普通积分或离散求和，实现了量子场论中的“降维打击”。在此过程中，冗余变量被高效“过滤”，仅保留了对于理解强耦合状态下的物理现象起关键作用的信息。由此得到的结论，为人们进一步理解描述现实世界的、不具备超对称的量子场论系统提供了指引。

局域化方法还成为了连接物理学与数学的重要桥梁。事实上，在过去的几个世纪中，物理学与数学的联系更多是单向的：物理学家从数学中汲取养分，将数学作为研究中不可或缺的工具，而数学家哪怕在研究源自物理的重要数学问题时

往往也无需理解问题背后的物理根源。但在超对称理论的舞台上，物理学与数学基于局域化方法得到的结果发生了紧密互动，有趣的思想在双方之间双向流动，这种互动催生了物理学家与数学家之间和谐且硕果累累的合作关系。

在本文中，我们将介绍超对称理论中局域化方法的基本思想和发展历程。需提醒读者的是，本文的内容显然无法囊括局域化方法的方方面面，感兴趣的读者应深入研究相关文献^[4-6]。

2 局域化思想

局域化思想源自1926年Lefschetz的工作^[7]，后经Duistermaat、Heckman、Atiyah、Bott、Berline、Vergne等数学家的不断发展和推广^[8-10]，被广泛应用于几何和拓扑的研究中。在本节中，我们将通过构造一个具体的简单例子，阐述局域化为何会发生。

我们以著名的高斯积分作为出发点，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1,$$

通过变量替换可以得到以下公式：

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi\alpha}} s'(\phi) e^{-\frac{1}{2\alpha}s(\phi)^2} = \sum_{a:s(\phi_a)=0} \text{sign}(s'(\phi_a)).$$

此处 $s(\phi)$ 是关于变量 ϕ 的任意函数，而 $s'(\phi)$ 是它的导数。为了简化讨论，我们已假设在每个解处 $s'(\phi_a) \neq 0$ 。计数的结果是一个整数，它可以看作是对方程 $s(\phi) = 0$ 的解进行带符号的计数，或是函数 $s(\phi)$ 的图像与轴线 $s = 0$ 的定向相交数。

这个公式有两个非同寻常的重要特点。一方面，等式左边包含可以连续变化的参数 α ，但等式右边的结果与 α 无关。如果我们能够预先知道这一性质，那么就可以在 $\alpha \rightarrow 0$ 的极限下使用鞍点近似法计算这个积分。不同于通常情况，此时这个近似计算的结果事实上是精确的，无需引入更多的高阶修正项。另一方面，虽然等式左边的被积函数依赖于 $s(\phi)$ 在所有点的值，但等式右边却并没有表现出这种依赖性，最终结果只依赖于 $s(\phi)$ 在所有零点附近无穷小区间内的行为。这种

看似依赖于对象整体细节、实则完全取决于特定局部的粗略性质的现象，被称作“局域化”。

显然我们并不能满足于发现了一个看似很特殊的公式。为了深刻挖掘局域化现象的根源，我们将对积分进行进一步改写。将引入变量 B ，以及满足反对易关系的格拉斯曼数 ψ 和 χ 。不同于通常的数，每个格拉斯曼数 θ 满足如下积分规则：

$$\int d\theta (a + b\theta) = b,$$

其中 a 和 b 是通常的数。利用新引入的变量，可以将积分重新写为

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \int d\phi d\psi d\chi dB \exp \left(-\frac{\alpha}{2} B^2 - iBs + i\chi s'(\phi)\psi \right) := \int d\Phi e^{-S}.$$

如此改写的收获在于积分中出现了一个新的对称性——超对称。其对称性生成元 Q 的作用连接了对易变量(玻色子)和反对易变量(费米子)，

$$Q\phi = \psi, Q\psi = 0, Q\chi = B, QB = 0.$$

与此同时，可以将“作用量” S 表达为

$$S = \left\{ Q, \chi \left(\frac{\alpha}{2} B + is \right) \right\}.$$

我们不妨考虑原积分的一类连续变形，

$$Z(t) = \int d\Phi e^{-S + tQV},$$

由于 $Q^2 = 0$ ，这类变形后的积分结果不依赖于参数 t ，

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \int d\Phi e^{-S + tQV} (QV) = \int d\Phi Q(e^{-S + tQV} V) = 0.$$

其中我们假设了积分测度在超对称变换下不变，以及分步积分带来的边界项贡献为零。特别地，之前观察到的 Z 不依赖于参数 α 的现象可以通过取 $V = \chi B$ 给出合理的解释。在 $\alpha \rightarrow 0$ 的极限下， S 中 B 的平方项消失而 B 的线性项依然存在，此时对 B 的积分正是狄拉克 δ 函数。这使得积分结果自然地出现局域化现象，

$$\begin{aligned} Z &= \int d\phi \delta(s) s'(\phi) = \sum_{a: s(\phi_a)=0} \frac{s'(\phi_a)}{|s'(\phi_a)|} \\ &= \sum_{a: s(\phi_a)=0} \text{sign}(s'(\phi_a)). \end{aligned}$$

这个简单的例子给我们的启示在于，通过对高斯积分的一系列改写并引入超对称，可以

推导出一类特殊的积分。此类积分的最终结果不依赖于连续参数，且表现出局域化现象。这个结果的普适性在于函数 $s(\phi)$ 选取的任意性。当然，此处的讨论只是将一维的普通积分化简为零维的离散求和，在物理中我们需要将其推广至无穷维的泛函积分，但基本思路不变。

3 上调场论

局域化方法在量子场论中的应用起始于上调场论(cohomological field theory, CohFT)。这是拓扑量子场论中至关重要的一大类，它一方面为数学中低维流形拓扑与几何的众多研究结果提供了统一视角，另一方面显著深化了我们对超对称量子场论的理解，并有望为弦论带来新见解。它的核心特征在于将某个满足 $Q^2 = 0$ 的超荷 Q 视为 Becchi—Rouet—Stora—Tyutin (BRST) 算符，并由此要求希尔伯特空间中的物理态 $|\psi\rangle$ 满足 $Q|\psi\rangle = 0$ ，且两个物理态 $|\psi\rangle$ 和 $|\psi\rangle + Q|\chi\rangle$ 被认为是等价的态。从数学上看， Q 的上同调描述了物理态的全体等价类。如果将理论定义在弯曲时空背景上，使得作用量和能量—动量张量满足：

$$S = \{Q, \Psi\}, T_{\mu\nu} = \{Q, U_{\mu\nu}\},$$

其中 Ψ 和 $U_{\mu\nu}$ 可以依赖于量子场和度规，那么配分函数仅依赖于理论所处空间的全局特性，而不随度规的连续变化而改变。更进一步，存在一大类关联函数，它们也不依赖于度规。这样的结果意味着，即使不像量子引力理论那样对度规进行积分，物理可观测量也可以独立于理论所使用的度规，从而在量子理论中实现广义协变性。类似的，物理可观测量也不依赖于 Ψ 中含有的连续变化的参数。这使得我们可以对它进行恰当变形，使得路径积分的贡献局域到满足特定方程的场构型上，从而简化计算。

3.1 超对称量子力学中的 Witten 指标

我们首先回顾超对称量子力学的基本概念。超对称量子力学是指满足以下形式的哈密顿量系统：

$$H = \frac{1}{2}\{Q, \bar{Q}\} = \frac{1}{2}(Q\bar{Q} + \bar{Q}Q),$$

其中 Q 满足 $Q^2 = 0$ 且与哈密顿量相互对易, $\bar{Q}$ 是 Q 的共轭。能以此形式表达的哈密顿量具有许多特殊性质。

首先, 一般量子力学系统对于能级并无限制, 但在超对称量子力学中, 任意量子态的能量期望值必然非负,

$$\begin{aligned}\langle\psi|H|\psi\rangle &= \frac{1}{2}\langle\psi|(Q\bar{Q} + \bar{Q}Q)|\psi\rangle \\ &= \frac{1}{2}(|\bar{Q}|\psi\rangle|^2 + |Q|\psi\rangle|^2) \geq 0.\end{aligned}$$

一个量子态是零能态的充分必要条件是它同时被 Q 和 $\bar{Q}$ 湮灭。

其次, 在没有额外对称性的情况下, 我们并不预期量子力学系统会发生简并。但在超对称量子力学系统中, 简并普遍存在: 对于任意 $E > 0$ 能级的能量本征态 $|\psi\rangle$, $(Q + \bar{Q})|\psi\rangle$ 是处于相同能级的另一个能量本征态。引入费米子数算符 F , 满足:

$$[F, Q] = -Q, [F, \bar{Q}] = \bar{Q}, [F, H] = 0.$$

我们将 $(-1)^F = 1$ 的态称为玻色态, $(-1)^F = -1$ 的态称为费米态。 $E > 0$ 能级的玻色态与费米态总是相互两两配对的(图1)。

由之前的讨论可知, 如果一个超对称量子力学系统具有零能态, 那么它一定是系统的基态, 此时称超对称是未破缺的; 反之, 如果系统的基态能量为正, 那么称超对称是破缺的。判断系统的超对称是否破缺, 往往是分析超对称系统首先需要回答的问题。对于一般的量子力学系统, 我们很难判断某个态的能量是否严格为零。在超对称理论中, 同样未必能分别计数玻色零能态个数 $n_B^{E=0}$ 和费米零能态个数 $n_F^{E=0}$ 。

转折出现在1982年, Witten仔细研究了超对称量子力学的基态^[11, 12], 并创造性地引入了新判据——Witten指标,

$$\mathcal{I} = n_B^{E=0} - n_F^{E=0} = \text{tr}(-1)^F e^{-\beta H},$$

其中求迹是对整个希尔伯特空间, 但因为任意 $E > 0$ 能级的玻色态和费米态总是两两配对从而贡

献相互抵消, 所以实际只有零能态才对 Witten 指标有净贡献。由此可以看出 Witten 指标不依赖于参数 β 。更进一步, 由于 Witten 指标的结果是一个整数, 且对理论的小扰动只可能使成对的玻色态和费米态同时从零能态变为非零能态或从非零能态变为零能态, 而玻色零能态的个数减去费米零能态的个数是不变的, 因此 Witten 指标独立于理论中所有可连续变化的参数。正因如此, 人们通常选取参数空间中的特殊点从而简化 Witten 指标的计算。

借助于 Witten 指标, 我们可以对超对称是否破缺做出判断: 当 $\mathcal{I} \neq 0$ 时, 系统一定存在零能态, 超对称未破缺; 当 $\mathcal{I} = 0$ 时, 系统可能存在零能态也可能不存在, 超对称可能破缺也可能未破缺, 但即使未破缺, 通常也总可以找到适当的小扰动使得超对称被破缺。

Witten 指标可以认为是上同调场论的第一个例子。以粒子在度规为 $g_{\mu\nu}$ 的弯曲空间中运动且受到超势 W 作用为例。其超对称量子力学模型的作用量可以写为

$$S = \int_0^1 d\tau \left\{ Q, \bar{\psi}_\mu \left(i \frac{d\phi^\mu}{d\tau} + ig^{\mu\nu}(\phi) \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi^\nu} + \frac{\beta}{2} g^{\mu\nu}(\phi) B_\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(\phi) \bar{\psi}_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \psi^\sigma \right) \right\},$$

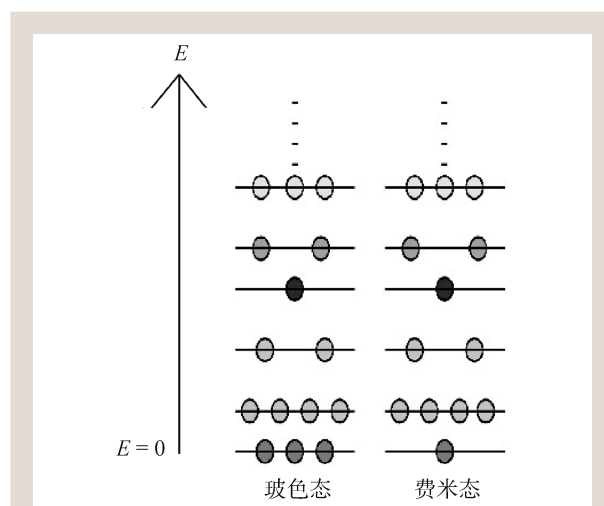


图1 超对称量子力学中各能级玻色态和费米态分布示意图。其中 $E > 0$ 能级的玻色态与费米态数量一定相同, 但玻色零能态和费米零能态数量可以不同

超对称变换规则为

$$Q\phi^\mu(\tau) = \psi^\mu(\tau), \quad Q\psi^\mu(\tau) = 0, \\ Q\bar{\psi}_\mu(\tau) = B_\mu(\tau), \quad QB_\mu(\tau) = 0.$$

Witten 指标计算的正是所有场都满足周期性边界条件 $\Phi(\tau+1) = \Phi(\tau)$ 的路径积分：

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2\pi i} \int d\phi d\psi d\bar{\psi} dB e^{-S}.$$

不难检验，它符合上同调场论的一般要求。根据以上讨论得出的普遍规律，计算结果与参数 β 和 W 中的连续变化参数无关。我们只需在 $\beta \rightarrow 0$ 的极限下进行计算，这导致了路径积分的局域化。最终结果可以表达为对微分方程 $dW = 0$ 的解进行带符号的计数，

$$\mathcal{I} = \sum_{a: dW(\phi_a) = 0} \text{sign det} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^\mu \partial \phi^\nu}(\phi_a) \right).$$

Witten 对超对称量子力学的研究思路很快被人们用于证明 Atiyah—Singer 指标定理^[13, 14]，并成为此后研究超对称理论中受超对称保护的物理量的模板。

3.2 高维超对称量子场论的拓扑扭曲

Witten 关于超对称量子力学数学结构的研究方法被 Floer 应用于无限维空间，获得了关于三维流形拓扑的重要成果^[15]。这一工作与 Donaldson 在四维光滑流形上发现的结果^[16, 17]存在深刻关联。基于 Atiyah 的建议^[18]，Witten 在 1988 年指出^[19]规范群为 $SU(2)$ 的 $N = 2$ 超对称杨—米尔斯理论在拓扑扭曲后可以被定义在任意光滑四维流形上。简单地说， $N = 2$ 超对称理论中的超荷 $Q_{\alpha i}$ 和 $\bar{Q}_{\dot{\alpha} i}$ 由于是旋量，并不总能定义在弯曲四维流形上。拓扑扭曲的过程将四维洛伦兹群 $SO(3,1) \cong SU(1,1)_- \times SU(2)_+$ 中的 $SU(2)_+$ 子群与 R 对称群 $SU(2)_R$ 等同起来，从而得到一个新的洛伦兹群 $SU(1,1)_- \times SU(2)_d$ 。超荷被重新组织为 Q 、 $Q_{\mu\nu}^+$ 和 Q_μ ，其中 Q 成为了一个标量，因此可以定义在一般弯曲四维流形上，同时满足 $Q^2 = 0$ 。经检验，此时得到的理论满足上同调理论的一般要求，因此理论的配分函数和一大类关联函数不依赖于耦合常数的

大小和四维流形的度规。在紫外极限下，这些物理可观测量对应于 Donaldson 不变量。这一重要结果给出了 Donaldson 理论基于的四维相对论性拉格朗日量的诠释，将三维与四维的成果联系了起来。可惜的是，对于一般四维流形的 Donaldson 不变量的计算在数学上十分困难。1994 年，基于 Seiberg—Witten 解^[20]的结果和上同调理论中物理可观测量独立于度规的性质，Witten 提出可以在红外极限下计算 Donaldson 不变量，并引入了更易处理的 Seiberg—Witten 不变量^[21]。在 1997 年，Moore 和 Witten 建立了 u 平面积分法^[22]，为通过物理方法计算 Donaldson 不变量提供了切实可行的框架。

拓扑扭曲的操作并不总是那么简单。对于更一般的 $N = 2$ 超对称理论，定义拓扑扭曲的操作可能需要提供额外的信息^[23]。而对于拥有最大超对称的 $N = 4$ 超对称杨—米尔斯理论，拓扑扭曲的方式并不唯一。除了 $N = 2$ 理论本身的拓扑扭曲外，还存在 Vafa—Witten 型拓扑扭曲^[24]和 Kapustin—Witten 型拓扑扭曲^[25]，分别对应于 Vafa—Witten 不变量和几何 Langlands 对偶等数学领域的研究。

类似的思想还被广泛用于对二维拓扑 σ 模型^[26]、拓扑量子引力^[27, 28]、三维拓扑 σ 模型^[29]等的研究，并在数学中打开了镜像对称、Rozansky—Witten 不变量等方向的研究大门。

4 Omega 背景

在上同调场论的框架建立之后，局域化方法适用范围的一次关键性突破来自于 Nekrasov 在 2002 年关于四维 $N = 2$ 超对称理论的研究^[30]。这项工作的研究动机来自于 Seiberg 和 Witten 在 1994 年划时代的工作^[20, 31]。基于超对称的特性和电磁对偶等假设，规范群是 $SU(2)$ 的四维 $N = 2$ 超对称规范理论的低能有效理论被成功求解。例如对于 $SU(2)$ 超对称杨—米尔斯理论，低能有效作用量完全由全纯函数 $\mathcal{F}(a, \Lambda)$ 给出，其中参数 a 描述了理论所处的真空态， Λ 是动力学产生的能标。在弱耦合区间，即参数 $|a| \gg |\Lambda|$ 的一个局部坐标卡内，

$$\mathcal{F}(a, \Lambda) = \frac{2ia^2}{\pi} \log\left(\frac{a}{\Lambda}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{2\pi i} a^{4k-2} \Lambda^{4k},$$

其中 c_k 是一系列被 Seiberg—Witten 解确定的有理数。通过电磁对偶变换，可以得到 $\mathcal{F}$ 在参数空间中任意点的表达式。Seiberg 和 Witten 的工作被迅速推广到更多的超对称理论和弦论中，并由此引发轰轰烈烈的第二次弦论革命。遗憾的是，这些进展往往都依赖于各种难以证明的假设。

Nekrasov 的工作提供了全新的思路。他对通常的四维平直时空 $\mathbf{R}^4$ 做了变形，并成功将理论定义在变形后的时空背景上。这种时空背景被称为 Omega 背景(图 2)，依赖于两个参数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 。Omega 背景在 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ 时恢复为 $\mathbf{R}^4$ ，而在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \neq 0$ 时实现了对非紧致空间 $\mathbf{R}^4$ 的有效紧化，使得原本无穷大的时空体积变为有限值 $1/(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$ 。在 Omega 背景下，被用于局域化计算的超荷不再是拓扑量子场论中的 Q ，而是 Q 与 Q_μ 的特定线性组合 Q' 。不同于之前的情况， Q'^2 是绕时空原点的旋转而不再是零。Nekrasov 基于之前与 Moore 和 Shatashvili 的工作^[32]，展示了如何应用局域化方法对超对称配分函数 $\mathcal{Z}$ (通常被称为 Nekrasov 配分函数) 和手征算符的关联函数进行严格计算^[30]。计算结果是微扰部分和非微扰部分贡献的乘积，其中微扰部分只涉及经典结果和一阶量子修正，而没有更高阶量子修正的影响，而非微扰部分可以表达为特定瞬子构型的无穷离散求和。

计算得到的结果包含丰富的物理信息。首先，可以通过严格计算的 Nekrasov 配分函数直接提取出决定了低能有效作用量的 $\mathcal{F}$ ：

$$\mathcal{F} = - \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \log \mathcal{Z}(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

此处我们略去了在 $\mathbf{R}^4$ 上的理论本身依赖的参数。这个关系意味着在此框架中，Seiberg—Witten 解来源于对 $\mathcal{Z}$ 临界点的刻画。这是目前已知的唯一严格求 Seiberg—Witten 解的方法。在实践中，由于 $\mathcal{Z}$ 的具体表达式非常复杂，目前完成推导的只有早期解决的规范群是单一经典李群^[33, 34]和只包含 SU 群的箭图规范理论^[35]，以及笔者于 2019 年解决的 SO - USp 箭图规范理论^[36]。如何将这一方法

用于更多的理论是一个重要遗留问题。

其次，Nekrasov 配分函数在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ 附近展开的更高阶包含了低能有效理论如何与引力相互耦合的信息。通过这些信息，一方面可以对拓扑弦论的计算^[37]做出检验，另一方面也启迪了人们在拓扑弦论的定义中加入额外参数^[38]。此外，笔者与 Manschot、Moore 通过第一性原理计算得到了理论在拓扑扭曲后的低能有效引力耦合^[39]，结果对于通过 u 平面积分法推导 Donaldson 不变量起到关键作用。

在 2009 年，Alday、Gaiotto、Tachikawa 发现 Nekrasov 配分函数在 $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$ 时与二维共形场论有着对应关系^[40]，而 Nekrasov、Shatashvili 指出 Nekrasov 配分函数在 $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ 而 ε_1 保持有限值时实现了对 Seiberg—Witten 解所对应的经典可积系统的量子化^[41]。为了更好地分析 Nekrasov 配分函数在一般情况下的性质，Nekrasov 在 2015 年通过对所有瞬子构型做重求和，推导得到了非微扰 Dyson—Schwinger 方程组^[42]。它以极其紧凑的方式包含了 Nekrasov 配分函数的全部信息，同时为严格证明而非检验 Alday—Gaiotto—Tachikawa 关系和 Nekrasov—Shatashvili 关系及其各种推论提供了恰当的出发点^[43—45]。

5 全面拓展

2007 年，Pestun 发现可以将四维 $N = 2$ 超对称理论置于四维球面上并保持部分超荷。利用局

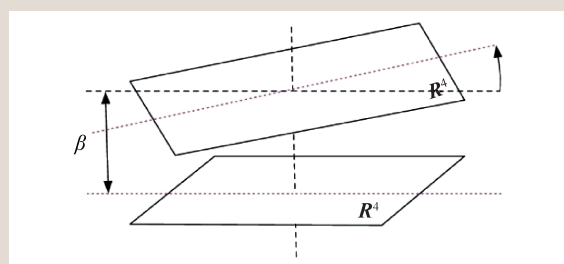


图 2 Omega 背景的构造方式：首先将在 $\mathbf{R}^4$ 上的四维 $N = 2$ 超对称理论提升为在 $\mathbf{R}^4 \times S^1$ 上的五维 $N = 1$ 超对称理论，再修改五维时空度规的直积结构使得 $(z_1, z_2, x^5) \sim (e^{i\beta\varepsilon_1} z_1, e^{i\beta\varepsilon_2} z_2, x^5 + \beta)$ ，其中 z_1, z_2 是 $\mathbf{R}^4 \cong \mathbf{C}^2$ 上的复坐标，最后取 $\beta \rightarrow 0$ 的极限回到四维理论

域化方法, 理论的配分函数和超对称 Wilson 圈的期望值被严格计算^[46]。不同于此前的情形, 此时用于局域化计算的超荷的平方是包括平移、时空旋转、标度变换、 R 对称变换等在内的一系列对称变换的线性组合, 并且局域化的结果并不是将计算约化为某种方程解的计数, 而是特定矩阵模型的积分。Pestun 严格计算的结果结合人们在 20 世纪八九十年代就已建立的分析矩阵模型的系统性工具, 直接证明并进一步推广了此前人们基于 AdS/CFT 对偶提出的猜想。

Pestun 的工作启发人们重新审视局域化方法在超对称理论中的适用范围。后续研究发现, 类似的计算可以拓展至其他类型的超对称理论和不同维度时空中的各种复杂几何背景。这其中最具代表性的情形为时空背景是各个维度的球面^[47–51]或它们的变形^[52–56]。这些计算得到的精确结果为发掘和检验不同规范理论之间或规范理论与弦论的对偶关系提供了重要的依据。

一般来说, 当将定义在平直时空背景上的超对称量子场论通过与度规的最小耦合定义在弯曲时空背景上时, 原本平直时空中的超荷会被破坏, 但有可能构造出在弯曲时空中的新超荷。因此, 在所有这些计算中, 人们都面临一个共同的技术与概念难题: 如何在弯曲时空上定义超对称量子场论, 并保持一定数量的超荷用于进行局域化计算。传统观点认为, 这要求弯曲时空上存在协变常旋量作为超对称变换的参数。但这是很强的限制, 例如对四维紧致流形, 协变常旋量只存在于四维环面和 $K3$ 曲面。后来, 人们发现这个条件可以被放宽到超对称变换参数需满足 Killing 旋量方程^[57–59]。这使得各个维度的标准球面成为了被允许的时空背景, 但仍无法处理变形后的球面等复杂情况。此外, 在确定弯曲时空背景后, 往往需要反复尝试才能通过繁琐的计算确定超对称变换规则。这导致在弯曲时空背景上构建超对称理论成为极其困难的任务。

2011 年, Festuccia 和 Seiberg 提出的系统性方法^[60]彻底破解了这一困境。他们的方法包含以下

步骤:

(1) 将弯曲时空流形的度规嵌入到恰当的超引力多重态中, 把原本超对称场论与度规的最小耦合扩展成包含规范场和物质场的超引力理论;

(2) 将超引力多重态中的所有场视为背景场并冻结量子涨落, 将度规设为所需的值;

(3) 将超引力多重态中的费米场及其超对称变换设为零, 由此确定超引力多重态中剩余的玻色场以及超对称变换参数;

(4) 将以上得到的超引力多重态的背景值和超对称变换参数代入已有的超引力理论的超对称变换规则, 取普朗克质量趋于无穷大的极限后即可得到在弯曲时空流形上的超对称量子场论的超对称变换规则。

值得指出的是, 度规嵌入超引力多重态的方法往往并不唯一。一方面, 不同的嵌入方法可能适用于不同类型的流形。例如对于四维 $N = 1$ 理论, 至少存在旧最小超引力多重态、新最小超引力多重态、超共形超引力多重态等不同方式将度规嵌入其中, 每种方式允许的度规形式不完全相同^[61, 62]。另一方面, 在度规相同但超引力多重态中其余玻色场不同的背景下, 配分函数等物理量的结果可以不同, 这意味着刻画弯曲时空背景上的超对称场论需要的信息不止限于度规。

6 总结与展望

局域化方法如同一把锋利的“手术刀”, 充分利用超对称的特殊性剥离了冗余的复杂性, 将超对称量子场论中一些原本看似不可能的计算变成可严格计算的离散求和、有限维普通积分或矩阵积分。这些计算结果在物理现象解释与数学结构揭示方面具有双重价值, 成为了当前超对称理论研究手中必备的工具。

尽管相关研究激增并已经取得了巨大成果, 但依然存在不少未解难题。首先, 随着维度增加

或超荷数目上升,对弯曲流形上超对称理论的构建和分析复杂度显著提升,尤其是对五维和六维的情形仅存在部分成果。其次,在将问题约化至矩阵模型的计算后,如何从中提取有价值的物理信息仍然缺乏普适而高效的手段。最后,现有的方法都只局限于对受到超对称保护的物理量进行

计算,如何拓展至更一般的物理量仍是充满混沌的巨大挑战。所有的这些问题都有待读者在将来给出解答。

致 谢 感谢东南大学江云峰教授、顾杰教授和中国科学院大学周稀楠教授的讨论。

参考文献

- [1] 江云峰. 物理, 2025, 54(6): 380
- [2] 周稀楠. 物理, 2025, 54(6): 388
- [3] 顾杰. 物理, 2025, 54(6): 404
- [4] Birmingham D, Blau M, Rakowski M *et al.* Phys. Rept., 1991, 209: 129
- [5] Cordes S, Moore G, Ramgoolam S. Nucl. Phys. Proc. Suppl., 1995, 41: 184
- [6] Pestun V *et al.* J. Phys., 2017, A50(44): 440301
- [7] Lefschetz S. Transactions of the American Mathematical Society, 1926, 28: 1
- [8] Duistermaat J, Heckman G. Invent. Math., 1982, 69: 259
- [9] Atiyah M, Bott R. Topology, 1984, 23: 1
- [10] Berline N, Vergne M C R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, 1982, 295: 539
- [11] Witten E. Nucl. Phys., 1982, B202: 253
- [12] Witten E. J. Diff. Geom., 1982, 17(4): 661
- [13] Alvarez-Gaume L. Commun. Math. Phys., 1983, 90: 161
- [14] Friedan D, Windey P. Nucl. Phys. B, 1984, 235: 395
- [15] Floer A. Commun. Math. Phys., 1988, 118(2): 215
- [16] Donaldson S. J. Diff. Geom., 1983, 18(2): 279
- [17] Donaldson S. Topology, 1990, 29: 257
- [18] Atiyah M. Proc. Symp. Pure Math., 1988, 48: 285
- [19] Witten E. Commun. Math. Phys., 1988, 117: 353
- [20] Seiberg N, Witten E. Nucl. Phys., 1994, B426: 19
- [21] Witten E. Math. Res. Lett., 1994, 1: 769
- [22] Moore G, Witten E. Adv. Theor. Math. Phys., 1997, 1: 298
- [23] Moore G, Saxena V, Singh R. 2024, arXiv: 2408.02744
- [24] Vafa C, Witten E. Nucl. Phys., 1994, B431: 3
- [25] Kapustin A, Witten E. Commun. Num. Theor. Phys., 2007, 1: 1
- [26] Witten E. Commun. Math. Phys., 1988, 118: 411
- [27] Witten E. Phys. Lett. B, 1988, 206: 601
- [28] Labastida J, Pernici M, Witten E. Nucl. Phys., 1988, B310: 611
- [29] Rozansky L, Witten E. Selecta Math., 1997, 3: 401
- [30] Nekrasov N. Adv. Theor. Math. Phys., 2003, 7(5): 831
- [31] Seiberg N, Witten E. Nucl. Phys., 1994, B431: 484
- [32] Moore G, Nekrasov N, Shatashvili S. Commun. Math. Phys., 2000, 209: 97
- [33] Nekrasov N, Okounkov A. Prog. Math., 2006, 244: 525
- [34] Nekrasov N, Shadchin S. Commun. Math. Phys., 2004, 252: 359
- [35] Nekrasov N, Pestun V. SIGMA, 2023, 19: 047
- [36] Zhang X. Phys. Rev., 2019, D100(12): 125015
- [37] Bershadsky M, Cecotti S, Ooguri H *et al.* Commun. Math. Phys., 1994, 165: 311
- [38] Iqbal A, Kozcaz C, Vafa C. JHEP, 2009, 10: 069
- [39] Manschot J, Moore G, Zhang X. JHEP, 2020, 06: 150
- [40] Alday L, Gaiotto D, Tachikawa Y. Lett. Math. Phys., 2010, 91: 167
- [41] Nekrasov N, Shatashvili S. 16th International Congress on Mathematical Physics (ICMP09), 2009. p.265
- [42] Nekrasov N. JHEP, 2016, 03: 181
- [43] Nekrasov N. 2017, arXiv: 1711.11582
- [44] Jeong S, Zhang X. Phys. Rev. D, 2024, 109(12): 125006
- [45] Jeong S, Zhang X. JHEP, 2020, 04: 026
- [46] Pestun V. Commun. Math. Phys., 2012, 313: 71
- [47] Kapustin A, Willett B, Yaakov I. JHEP, 2010, 03: 089
- [48] Kim H, Kim S. JHEP, 2013, 05: 144
- [49] Källén J, Zabzine M. JHEP, 2012, 05: 125
- [50] Doroud N, Gomis J, Le Floch B *et al.* JHEP, 2013, 05: 093
- [51] Benini F, Cremonesi S. Commun. Math. Phys., 2015, 334(3): 1483
- [52] Hama N, Hosomichi K, Lee S. JHEP, 2011, 05: 014
- [53] Imamura Y, Yokoyama D. Phys. Rev. D, 2012, 85: 025015
- [54] Hama N, Hosomichi K. JHEP, 2012, 09: 033
- [55] Imamura Y. PTEP, 2013, 2013(7): 073B01
- [56] Kim H, Kim J, Kim S. 2012, arXiv: 1211.0144
- [57] Karlhede A, Rocek M. Phys. Lett. B, 1988, 212: 51
- [58] Johansen A. Int. J. Mod. Phys. A, 1995, 10: 4325
- [59] Blau M. JHEP, 2000, 11: 023
- [60] Festuccia G, Seiberg N. JHEP, 2011, 06: 114
- [61] Dumitrescu T, Festuccia G, Seiberg N. JHEP, 2012, 08: 141
- [62] Dumitrescu T, Festuccia G. JHEP, 2013, 01: 072