

量子物理中的复现方法*

顾杰[†]

(东南大学物理学院 丘成桐中心 南京 210096)

2025-04-07收到

[†] email: jie-gu@seu.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20250605

CSTR:32040.14.wl20250605

Resurgent methods in quantum physics

GU Jie[†]

(Shing-Tung Yau Center, School of Physics, Southeast University, Nanjing 210096, China)

摘要 量子物理中, 利用微扰展开计算物理量得到的通常是发散的渐近级数, 这意味着这些物理量往往有不可忽略的非微扰贡献。博雷尔求和提供了将发散级数进行合理求和的方法, 而在此基础上发展起来的复现理论是一种从微扰级数本身出发就可以提取出非微扰贡献的强大理论工具。文章将对复现理论及其在量子物理中的应用做简单的介绍。

关键词 发散级数, 博雷尔求和, 瞬子, 重整子, 复现, 非微扰

Abstract Perturbative expansions of physical observables calculated in quantum physics are usually divergent asymptotic series, which indicates that these physical observables have important non-perturbative contributions. Borel resummation provides a suitable method to resum asymptotic series, and the resurgence theory, which is developed based on Borel resummation, is a powerful method that allows extraction of non-perturbative contributions from a perturbative series. We give an elementary introduction to the resurgence theory and its application in quantum physics.

Keywords divergent series, Borel resummation, instanton, renormalon, resurgence, non-perturbative

1 发散的微扰级数

现代量子场论有了长足的发展, 许多物理量可以进行更精确的计算。在量子场论中, 大部分的物理量不能严格计算, 只能写成某个数值非常小的微扰参数的幂级数, 称为关于这个参数的微扰级数。通常意义上说的对某个物理量更精确的计算, 是指对其微扰级数可以计算更多项的系数。比如著名的电子反常磁矩, 即因为电磁场的量子

涨落而导致的电子磁矩与经典电磁学理论预言之间的微小偏差, 可以表示为大小约为 $1/137$ 的精细结构常数(用来衡量电子与电磁场之间的耦合强度)的微扰级数。20 世纪中叶, 朝永振一郎、施温格和费曼发展出了计算量子涨落的技术, 并计算了电子反常磁矩的第一个系数。之后的物理学家们经过艰苦卓绝的努力, 终于在 2017 年将电子反常磁矩的理论计算推进到了微扰级数的第五个系数。理论计算和实验数据的吻合程度也因此从三位有效数字上升到了惊人的九位有效数字, 使得电子反常磁矩成为理论预言和实验数据吻合得最

* 国家自然科学基金(批准号: 12375062)资助项目

好的物理量之一。

然而如果我们计算微扰级数更多的系数，是否一定能够让理论预言和实验测量吻合得更好呢？答案是否定的。在量子场论发展的早期，人们曾认为譬如电子反常磁矩之类的微扰级数应该是收敛的，即级数每一项的绝对值都要比前一项小得多，因此当越来越多的项被加起来之后，微扰级数会越来越趋近于一个有限大小的数值。但是1952年戴森用一个简单而优雅的方法粉碎了人们的梦想^[1]。戴森考虑将精细结构常数不断变小的过程。如果微扰级数是收敛的，那么在这个过程中，级数的收敛性会变得更好，级数求和会更快地趋近于有限数值。但是当我们跨过零点使得精细结构常数变为一个依然很小但是符号为负的数值时，电磁量子理论就会出现灾难。由于电磁场的量子涨落，真空中各处会不断诞生正负电荷对。在精细结构常数大于零的现实世界里，这些正负电荷对会因为彼此吸引而在诞生后迅速湮灭并消失，不会被观测到。但是如果精细结构常数的数值小于零，这些正负电荷对就会因为互相排斥而分离开来，成为能够被观测到的带电粒子。那么真空就会因为源源不断产生的大量带电粒子对而瓦解，不能稳定存在。然而对于数学家来说，如果一个幂级数是收敛的，级数的参数是正是负并没有区别，级数求和都会趋近于有限数值，并且这个有限数值在级数参数跨过零点的时候应该是连续变化的，不可能出现电磁量子理论中这种因为耦合参数的符号不同而截然不同的现象。因此后者中出现的微扰级数不可能是收敛的。

利用戴森的方法，很容易论证量子场论中绝大部分物理量的微扰级数都是发散的。对于这些级数来说，一开始每一项的数值可能比前一项的数值要小，但是从某一项开始，每一项的数值都要比前一项更大，而整个级数求和的数值也会趋向于无穷大从而发散，就像图1中所示的那样。对于物理学家来说，避开这个级数发散问题的一个最直接的方法就是对级数求和进行最优截断，只进行到数值最小的那一项为止。但是这个方法只是回避了问题，并不能得到准确的结

果。可以证明，最优截断总会产生数量级为 $e^{-1/x}$ 的误差，其中 x 是微扰参数的大小。对于电磁量子理论来说，因为作为微扰参数的电磁耦合参数很小，这个误差极其微小。但是对于描述强相互作用的量子理论等其他理论来说，微扰参数的数值接近于1，那么整个理论就会因为这个误差太大而失效。

2 发散级数的求和方法

要更好地理解并合理地利用物理中的发散级数，我们需要一个处理发散级数的数学理论。数学家们对于发散级数的认识也经历了一个漫长而逐渐发展的过程。阿贝尔在1828年曾说，“发散级数是魔鬼的发明，基于它们做任何论证都是一种耻辱”。到了1886年庞加莱终于发展了一套用来严格描述发散级数的理论，即渐近展开理论。1899年，博雷尔给出了一个可以将渐近级数求和的魔法公式，称为博雷尔求和(Borel resummation)。作为一个简单的例子，可以考虑一个发散的渐近级数：

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! z^n ,$$

对这个渐近级数做博雷尔求和之后的结果是：

$$F(z) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+tz} e^{-t} dt .$$

很容易看出来对于 $z > 0$ ，这是一个有良好定义的函数。而将这个函数在 $z=0$ 附近展开就可以还原为渐近级数 $f(z)$ 。

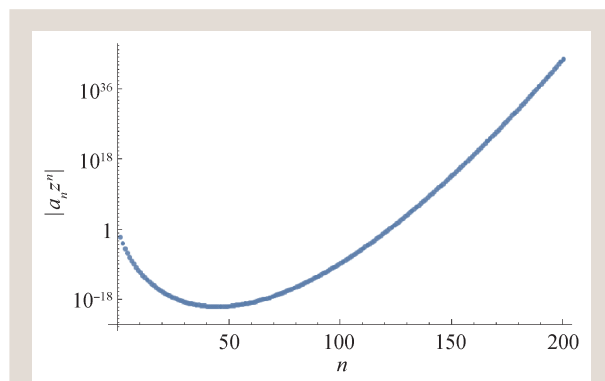
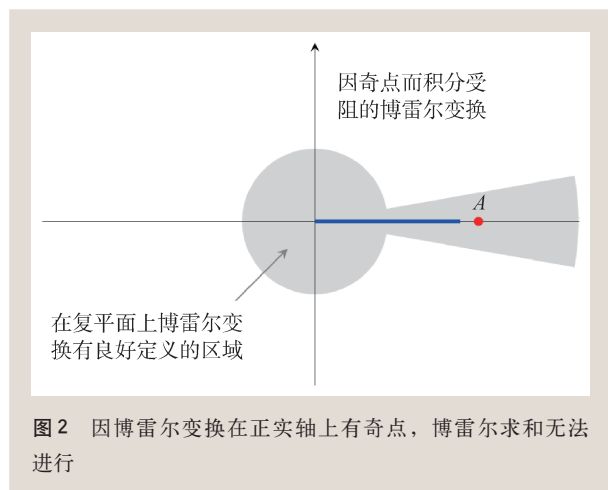


图1 一个典型的发散级数的单项数值增长行为

与最优截断不同，博雷尔求和利用了渐近级数的所有项，并且是数学上严格的。譬如数学家可以证明，如果存在一个满足某些解析性质的函数，并且该函数关于微扰参数的渐近展开等于原有渐近级数，那么级数的博雷尔求和与这个函数相同。

通过博雷尔求和的方法，人们可以在量子理论中用微扰级数来严格定义相关的物理量。但是在这个过程中，人们发现有时候应用博雷尔求和公式会遇到困难。博雷尔求和涉及到从渐近级数出发构建一个被称为博雷尔变换的辅助函数，然后将博雷尔变换沿着正实轴进行积分。要成功地进行博雷尔求和，需要博雷尔变换在正实轴上没有奇点，否则的话，如图2所示，博雷尔求和就会因为积分无法进行而失效。博雷尔变换奇点的分布依赖于微扰级数系数的增长速度。不同于只关心微扰级数中数值不断减少的少数前面几项的最优截断方法，博雷尔求和的方法关心整个微扰级数，包括数值不断增大的高阶部分。这些高阶项的系数呈现出一种统一的规律，会随着项数的增加而呈阶乘形式 $n!$ 高速增长。这也是即使微扰参数再小，渐近级数的单项数值最终会变大并趋于无穷的原因。更确切来说，单项数值的增长方式为 $n!/A^n$ 。这个标记为 A 的特征数字非常重要，因为博雷尔变换会有一个位置在 A 的奇点。当 A 大于零时，博雷尔变换会有一个大于零的奇点，从而导致博雷尔求和失效。我们可以选择在积分



时绕开这个奇点，但是因为向上和向下两种绕开方式，得到的结果是不确定的。在这个时候，物理学家就会认为这个发散的微扰级数是无法严格求和的，相关的量子理论也是无法严格定义的。

围绕这个想法，20世纪六七十年代的物理学家花了大量的精力来分析各种量子理论中微扰级数系数的具体增长形式，又称为微扰系数的高阶行为。知道了微扰系数的高阶行为，一方面有助于分析博雷尔变换奇点的位置，从而判断博雷尔求和是否有效；另一方面在博雷尔求和有效的情况下，也有助于在数值上对微扰级数进行高效的博雷尔求和计算。比如对于著名的四次方量子力学模型，华人理论物理学家吴大峻与合作者给出了稳定状态能量关于耦合参数的微扰系数的高阶行为^[2]。四次方量子力学模型推广到量子场论中就是重要的玩具模型四次方场论。一系列的工作表明，博雷尔求和对于四维的四次方场论是失效的，但是对于二维、三维的四次方场论有效，并且可以用来定义和计算临界指标等重要的物理量^[3]。

3 非微扰效应

对于描述现实世界中各种相互作用的量子理论来说，博雷尔求和是失效的。不过随着对微扰级数认识的进一步加深，人们逐渐意识到博雷尔求和的失效并不是件可怕的事情。这只是在告诉人们要完整地刻画量子理论，单凭微扰级数是不够的。量子理论中有很多没有办法用微扰级数进行描述的非微扰现象，最典型的是20世纪之初量子力学发展早期就已经发现的双势阱模型中的量子隧穿效应：粒子即使在能量很低的情况下也能从一个势阱的最低处穿越两个势阱之间的势垒跑到另一个势阱的最低处，如图3所示。隧穿效应发生的概率约为 $e^{-1/x}$ ，其中 x 是作为微扰参数的势阱耦合参数。对于这样一个概率，以 x 为小量做渐近展开永远得到零结果，因此这样的非微扰效应无法通过微扰级数来描述。量子物理量的微扰展开由于博雷尔变换在正实轴上有奇点从而导致

博雷尔求和失效，其实是因为这个量子理论中有不可忽略的非微扰效应。

经过分析发现，量子场论中的非微扰效应大致可以分为两种。第一种是瞬子(instanton)效应，可以从多个角度来理解瞬子。一方面，我们可以从费曼图的角度来理解瞬子。费曼图是一种形象的用来描述微观粒子通过不断释放和吸收虚拟粒子来发生相互作用的方式，每个粒子由一根线条表示，而粒子释放和吸收虚拟粒子的过程通过线与线之间的交点表示。量子物理量以耦合参数为小量做展开得到的微扰级数的第 n 阶系数，来源于所有带 n 个圈的费曼图的贡献之和。简单的组合数学分析表明，费曼图的数目随着圈数的增加会呈阶乘型增长。因此如果每个费曼图的贡献大小相近的话，所有费曼图的贡献之和也会随着圈数的增加，也就是微扰级数阶数的增加，而呈阶乘型的增长。这种因为费曼图数目的快速增长而导致级数发散的现象称为瞬子型的级数发散。另一方面，我们也可以用半经典的图像来理解瞬子。从物理上来说，瞬子的出现是由于在半经典近似下物质场有多个可能的能量最低态，而由于量子涨落效应，物质场不会停留在一个能量最低态，而可以在这些不同的能量最低态之间穿越。双势阱模型中的隧穿效应，就是一个典型的瞬子效应^{[4] 1)}。瞬子效应是一种普遍存在的非微扰效应，在几乎所有的量子力学和量子场论模型中都有可能出现。

另一种更加复杂的非微扰效应是重整子(renormalon)。重整子是一种神秘的非微扰现象，在20世纪70年代才在人们研究二维可积场论时被发现，随后特·胡夫特在描述强相互作用的量子场论中发现重整子也起到了重要的作用。从费曼图的角度来看，重整子来源于那些比较特殊的费曼图，它们的贡献不是大小相近，而是某一族费曼图本身的贡献就会随着圈数的增加而呈阶乘型增长。图4展示了一个典型的例子。这种不是因

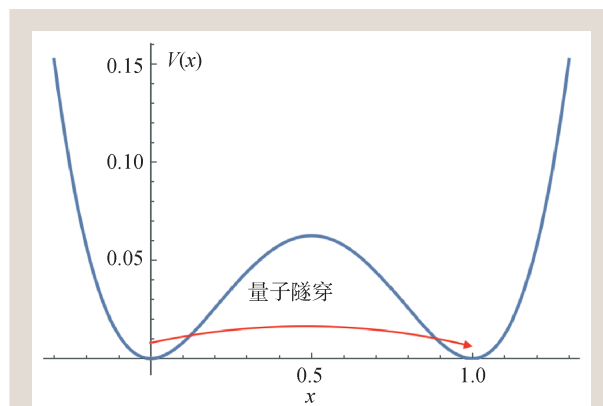


图3 量子力学双势阱模型中的量子隧穿效应

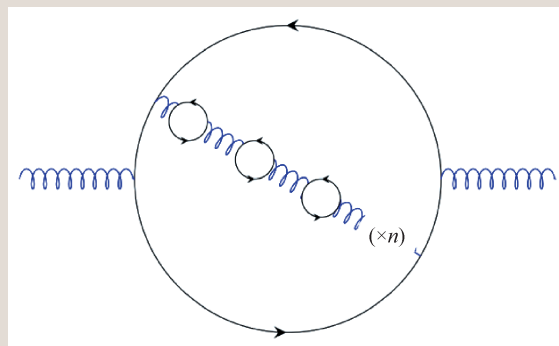


图4 一族典型的会产生重整子效应的费曼图

为费曼图数目的增长，而是因为某一类型的费曼图本身贡献的快速增长而导致的微扰级数发散的现象称为重整子效应。理论分析表明，重整子和量子场论中的重整化流现象(见周稀楠老师文章的介绍^[5])息息相关。如果在量子理论中通过标度变换的方式从小尺度/高能标变换到大尺度/低能标的过程中，一个量纲为零的耦合参数因为量子涨落而获得了不为零的量纲，那么重整子效应就会出现。重整子效应是一种在量子场论中才会出现的独特现象，而且只有在量子涨落比较强的量子场论中才会出现，在量子涨落比较小或者对称性比较强的量子场论中则影响比较小，比如在拓扑场论、共形场论、超对称场论或者超可重整场论中一般不会出现。但是在描述现实世界的量子场论中，重整子的出现几乎不可避免。从理论分析的角度来说，和瞬子不同，平坦空间中的重整子

1) 如果读者对量子力学有一定的了解，那么双势阱模型的基态能量可以通过欧氏空间的路径积分来帮助理解。一方面，路径积分的微扰展开可以用费曼图技术进行计算。分析表明，费曼图的数目会随着圈数的增加而呈阶乘型的增长，导致微扰级数发散。另一方面，路径积分的非微扰贡献可以用鞍点分析来获得，这些非凡的鞍点可以解读为瞬子解。具体分析参见文献[4]。

至今为止还没有可靠的半经典图像，因此分析起来要困难的多。

因此，如果一个量子场论模型中物理量的微扰级数在应用博雷尔求和时失效，这并不意味着这个场论模型是有缺陷的，而是说明该场论模型中有着诸如瞬子和重整子之类非常丰富的非微扰结构²⁾，需要以某种合适的方式加入到该物理量中来。

4 复现理论

20 世纪 80 年代，数学家埃卡尔(Jean Ecalle)发展出一套独特的数学理论，称为复现理论(resurgence theory)^[6]，可以指导人们在微扰级数的基础上，如何寻找和加入这些非微扰的贡献，从而得到物理量的完整描述。

复现理论包含两个层次的重要假说。第一个层次的假说是，每一种非微扰贡献都可以描述为一个非微扰因子 $e^{-A/x}$ 乘以一个新的渐近级数的形式，权称之为非微扰级数。包含了非微扰贡献的物理量的完整描述，是微扰级数和非微扰级数通过合适的方式加起来之后的超越级数。而物理量的准确数值，是对超越级数各个部分进行博雷尔求和之后相加的结果，称之为超越级数假说。在这个过程中，无论是微扰级数还是非微扰级数，在进行博雷尔求和时都会因为博雷尔变换在正实

轴上有奇点而无法积分从而失效。但是，我们可以通过绕开这些奇点的方式来避开这个问题。更重要的是，尽管微扰级数和非微扰级数在通过这种方式求和时会因为上下两种绕开方式而产生不确定性，这两种不确定性会神奇地互相抵消，从而产生一个唯一确定的结果。

复现理论第二层次的更加惊人的假说是，微扰级数本身已经包含了非微扰级数的信息。微扰级数和非微扰级数的博雷尔求和不确定性可以抵消这个事实，表明微扰级数和非微扰级数之间有着紧密的联系。事实上，这两者可以通过被称为斯托克斯变换(Stokes transformation)的线性变换关系联系起来。由此导致的一个非常重要的后果，是非微扰级数的信息可以通过分析微扰级数的各种性质而提取出来；换句话说，非微扰级数会自然而然地在微扰级数中复现出来，称之为复现假说。比如说，微扰级数高阶系数增长行为中的特征量 A ，正是非微扰因子中的权重 A ；而高阶系数的具体增长方式，和 $n!/A^n$ 会有一些细节上的微小偏差，从中可以抽取出非微扰级数首几项的系数。因此复现现象之所以会发生，正是因为微扰级数本身是发散的。正如物理学家贝里于 2003 年在牛顿研究所说^{[7] 3)}，“级数不会无缘无故发散；这并非偶然的事情。级数的发散必然反映出其背后的原因”。这背后的原因就是发散级数之间的紧密关联。

总而言之，埃卡尔的复现理论为我们在量子理论中，如何为一个物理量的微扰级数补全非微扰贡献并获得该物理量的完整描述提供了路线图，如图 5 所示。我们可以通过研究微扰级数系数的具体增长方式或者其他辅助的方式计算可能的非微扰贡献和相关的非微扰级数(复现假说)。这些非微扰贡献包含了来自瞬子或者重整子的贡献。在得到非微扰级数之后，需要将其与微扰级数相加得到超越级数，然后进行博雷尔求和，来得到物理量的完整描述(超越级数假说)。

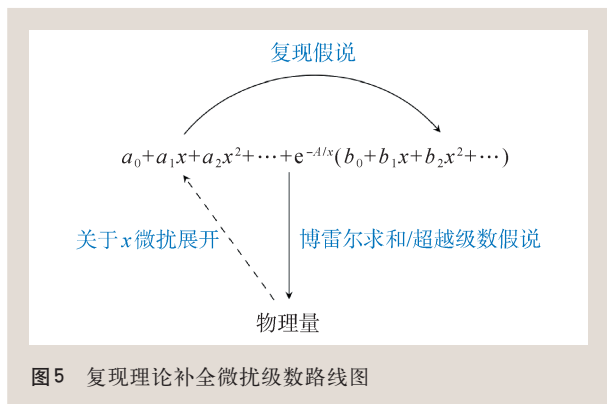


图5 复现理论补全微扰级数路线图

2) 理论上可能存在其他类型的非微扰贡献，不过现有的物理学研究中发现的非微扰贡献一般总能用瞬子或者重整子现象来描述。

3) Berry M. Stokes and the Rainbow, Newton Institute Lecture, 2003, 原文为 “Series don’t diverge for no reason; it is not a capricious thing. The divergence of a series must reflect its cause.” 参见文献[7]。

5 量子理论中的复现方法

自从复现理论诞生以来,在量子力学、量子场论乃至弦理论等各种量子理论中得到了广泛应用。从量子力学的课本中可知,即使是看似简单的一维非相对论性量子力学,可以严格求解的量子力学模型也是屈指可数。除此之外的量子力学模型只能用微扰论进行近似计算。比如量子稳定状态的能量可以用非含时微扰论计算为关于普朗克常数的微扰级数,而描述这些稳定状态的波函数也可以用WKB (Wenzel—Kramers—Brillouin)近似的方法写成关于普朗克常数的微扰级数。无论是定态能量还是定态波函数,都可以用复现理论进行处理,从而得到非近似的严格结果。一方面,通过研究热力学路径积分,以及微扰级数的高阶行为,可以分析定态能量可能受到的来自于瞬子的非微扰贡献^[8]。另一方面,通过引入复现理论的元素,WKB方法可以发展成数学上严谨的严格WKB方法(exact WKB method),从而给出定态波函数的准确描述^[9]。然后可以通过对波函数施加适当边界条件的方式,来计算准确的定态能量。通过这些方法,人们在20世纪八九十年代写下了双势阱模型(图3)、余弦模型(图6)等带有显著瞬子贡献的一维量子力学模型的定态能量严格解^[8, 10]。进入21世纪,人们还在此基础上发现了各种有趣的现象,比如常微分方程—可积模型对偶关系(ODE—IM correspondence)、超对称量子力学模型的柴郡猫型复现行为(Cheshire cat resurgence)等。除此之外,人们还分析了相对论性量子力学模型,此时刻画系统动力学的薛定谔方程从二阶常微分方程变成了二阶线性差分方程。最近这方面最重要的工作是有人在2024年给出了用严格WKB方法分析二阶线性差分方程所需要的联络公式^[11]。

除了一维的量子力学模型,我们还可以研究多维空间的量子力学模型。一个有意思的模型是在二维周期性势阱中放置一个电子,然后在垂直

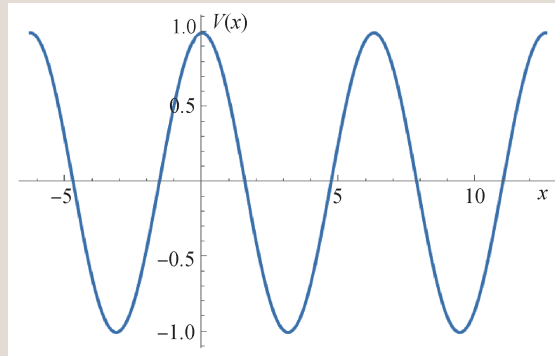


图6 带有周期性势阱的量子力学余弦模型

方向施加均匀磁场。侯世达(D. Hofstadter)在1976年发现,电子的能带关于磁场的依赖关系呈现出著名的类似蝴蝶图案的分型结构,被称为侯世达蝴蝶(Hofstadter butterfly, 见本期414页图1)^[12]。电子的能量可以写成关于磁场强度的微扰级数。人们发现电子的能带结构应该可以通过在微扰级数的基础上加上因为瞬子效应导致的非微扰贡献来解释。近日,笔者与合作者于2024年利用复现理论分析了这个模型,并利用该模型和拓扑弦模型之间的关系,在磁场强度是某些特殊数值的时候,成功地写下了包含了所有非微扰贡献的完整的电子能带表达式^[13]。

复现理论也被广泛地应用于量子场论中。在这个过程中,人们主要遵循两条不同的研究路线。第一条研究路线是研究复现理论在量子场论中应用的普适性。因为不同的量子场论模型呈现出丰富的多样性,人们需要在各个具体的量子场论模型中检验复现理论两个假说的正确性。在这一条路线中,为了简化研究,一般关注没有重整子只有瞬子效应的理论模型。这些模型一般来说会有比较高的对称性,量子涨落因为较高的对称性可以受到较好的控制。比如说著名的三维陈—西蒙斯理论,这是个像描述强相互作用量子场论一样的规范场论。描述相互作用变换的规范群是更一般的 $SU(N)$,但不同的是这又是一个拓扑场论,具有很高的对称性,物理量的计算不依赖于三维时空的度规。要验证这个理论是否没有重整子效应,可以考虑著名的大 N 极限,即耦合常数 g_s 和

$1/N$ 同步趋于零而保持乘积 $t = g_s N$ 不变。在大 N 极限下, 每个物理量可以写成一个双重级数: 这个物理量是 $1/N$ 级数的同时, 每一项的系数也是 t 的级数。在这个过程中, 瞬子效应和重整子效应会分离开来。瞬子效应体现在对 $1/N$ 级数的非微扰贡献, 而重整子效应体现在对 t 级数的非微扰贡献。如果一个场论没有重整子, $1/N$ 级数的系数会是一个收敛的 t 级数。用这个方法, 人们于2007年证明了三维陈—西蒙斯理论中不存在重整子效应。另一方面, $1/N$ 级数本身是一个发散级数, 因此确实有来自瞬子的非微扰贡献。在此基础上, 规范群较小的三维陈—西蒙斯理论中的瞬子效应得到了广泛的研究, 比如对于规范群为 $SU(2)$ 的三维陈—西蒙斯理论, 当三维时空是某种特殊的拓扑非平凡空间时(图7), 笔者和合作者们于2020年计算了体现真空量子涨落幅度的配分函数所受到的所有瞬子贡献^[14]。这是一个罕见的所有瞬子贡献都可以被计算的非平凡的量子场论模型。

另一种没有重整子贡献的重要场论模型是超对称规范场论。这也是一种具有很强对称性的理论, 量子涨落受到很大的限制, 人们因此可以开发譬如超对称局域化等方法来严格计算一些超对称场论的配分函数(见张欣宇老师的文章)^[15]。在超对称规范场论中, 有一个非常重要的理论是

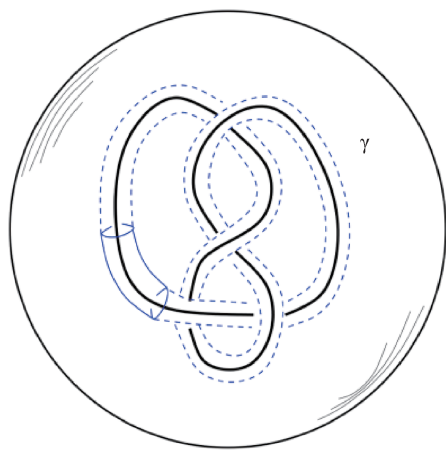


图7 陈—西蒙斯理论的三维时空可以是一个拓扑非平凡的三维空间, 比如三维球面中挖除一个扭结(γ)之后的剩余空间

4维 $N=4$ 杨—米尔斯规范场论。这个理论不但有很强的超对称性, 同时是一个共形场论(见周稀楠老师的文章^[5]), 并且在大 N 极限下是可积的(见江云峰老师的文章^[16])。这使得可以用复现理论结合超对称局域化和可积性等多种理论工具来对该模型中非微扰贡献进行分析。从2015年开始, 人们用复现理论在大 N 极限下陆续研究了尖点反常维度、积分关联函数、圆形威尔逊环、通量管相关函数等多种物理量的非微扰贡献。

第二条研究路线是分析重整子效应。因为现实世界中, 包括强相互作用等各种量子场论模型中, 都有不可忽略的重整子效应, 我们必须要对重整子效应有更好的理解。这方面的研究工作在21世纪有两个重要的进展。一个是Philip Argyres、Mithat Ünsal、Gerald Dunne等人自2012年开始提出的一种研究重整子的新思路, 可以用来给重整子提供半经典描述^[17]。他们发现对于描述四维时空中强相互作用的量子场论和与之类似的二维时空的一些规范场论, 如果把场论紧致到一维圆环上, 并且在圆环的尺寸很小时, 重整子效应会表现为某种孤子束缚对, 而后者像瞬子一样可以有半经典的描述方式, 更容易进行理论分析和计算。另一个重要的进展是自2019年开始, Marcos Mariño等人对各种二维可积场论中的重整子效应做了系统的研究, 讨论了诸如基态能级和热力学自由能等物理量会有什么样的重整子型的非微扰贡献, 以及这些非微扰贡献什么时候可以从微扰级数中复现出现。此外他们还发现了一种未知的新型重整子非微扰贡献^[18]。这些工作对于人们进一步认识量子场论中的重整子效应有非常重要的作用。

除了这些典型的量子场论, 复现理论在一些非典型的场论中也得到了广泛的应用。比如有人讨论了在描述高温等离子体的相对论性流体力学中如何利用复现理论来描述能动张量场, 还有人讨论了如何在宇宙学中应用复现理论。除此之外, 量子场论中一个最新的进展是对量子场论进行各种保持其良好性质的形变。其中一个比较特殊的

形变是 $T\bar{T}$ 形变。这是对二维量子场论的一种特殊形变，可以保持场论的量子可积性，但同时会显著改变场论的高能性质，为场论的紫外行为提供了不同于朗道极点和渐近自由的第三种可能性。然而， $T\bar{T}$ 形变后的物理量计算较为复杂，通常只能进行微扰计算。笔者和江云峰于2024年合作，在 $T\bar{T}$ 形变的二维共形场论中应用复现理论，找到了形变理论相对于形变参数的微扰级数具有非微扰贡献的决定性证据^[19]。

最后，弦理论中也有大量丰富的非微扰贡献，可以用复现理论进行研究。弦理论是对引力量子化的一种重要尝试。弦理论认为所有微观粒子，包括描述引力相互作用的引力子，都可以用一根弦的不同的振动模式来表示。一个相对简单的弦理论模型是拓扑弦理论，可以看作是紧致到卡拉比-丘六维流形上的弦理论的一个简化版本。拓扑弦理论中的一个重要物理量是真空自由能，用来描述真空中量子涨落的强度。这是一个关于弦耦合参数的发散级数，可能会有非微扰修正。自2006年开始，Marcos Mariño、Ricardo Schiappa 等人开始用复现理论对拓扑弦可能受到的非微扰贡献进行研究^[20]。他们发现证据表明，拓扑弦的真空自由能可能会有来自瞬子的贡献，可以用弦理

论的D膜来描述。自2022年以来，笔者与合作者们通过一系列工作，通过结合全纯反常方程和复现理论工具，完整地求解了瞬子对真空自由能贡献的非微扰级数的可能形式^[21]。在这些结果的基础上，人们可以写下包含了所有瞬子非微扰贡献的完整的真空自由能。

6 总结和展望

总而言之，复现理论是一种研究非微扰贡献的强大理论工具。复现理论在包括量子力学、量子场论和弦理论等各个领域都有广泛的应用前景，同时复现理论也带来了更多的挑战。复现理论作为一个数学理论给量子场论等物理学领域带来的承诺非常诱人，从微扰级数出发就可以获得关于非微扰贡献的信息。但是在实际应用过程中，因为微扰级数本身的信息往往就是不完整的(通常只有少数几项的系数)，我们需要结合针对具体物理模型开发的其他技术工具才能更好地发挥复现理论的威力。这在操作过程中更像是一门艺术。其次，为了在描述现实世界的量子场论中更好地应用复现理论，我们需要更好地认识重整子效应，在这方面还需要很多的工作。

参考文献

- [1] Dyson F. Phys. Rev., 1952, 85: 631
- [2] Bender C, Wu T T. Phys. Rev., 1969, 184(5): 1231
- [3] Brézin E, Le Guillou J C, Zinn-Justin J. Phys. Rev. D, 1977, 15 (6): 1544
- [4] Mariño M. Instantons and Large N: An Introduction to Non-perturbative Methods. Cambridge University Press, 2015
- [5] 周稀楠. 物理, 2025, 54(6): 388
- [6] Écalle J. Les Fonctions Resurgentes, vols. I, II, III, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques. Orsay, 1981
- [7] Dunne G, Ünsal M. JHEP, 2012, 11: 170
- [8] Zinn-Justin J. Nucl. Phys. B, 1983, 218: 333
- [9] Voros A. Annales de l'IHP. Physique théorique, 1983, 39(3): 211
- [10] Delabaere E, Dillinger H, Pham F. J. Math. Phys., 1997, 38(12): 6126
- [11] Del Monte F, Longhi P. 2024, arXiv: 2406.00175
- [12] Hofstadter D. Phys. Rev. B, 1976, 14(6): 2239
- [13] Gu J, Xu Z. JHEP, 2025, 02: 099
- [14] Garoufalidis S, Gu J, Mariño M. Comm. Math. Phys., 2021, 386 (1): 469
- [15] 张欣宇. 物理, 2025, 54(6): 396
- [16] 江云峰. 物理, 2025, 54(6): 380
- [17] Argyres P, Ünsal M. Phys. Rev. Lett., 2012, 109: 12
- [18] Mariño M, Miravittas R, Reis T. JHEP, 2022, 08: 279
- [19] Gu J, Jiang Y, Wang H. 2024, arXiv: 2410.19633
- [20] Mariño M. JHEP, 2008, 2008: 03
- [21] Gu J, Kashani-Poor A K, Klemm A *et al.* SciPost, 2024, 16: 079