福克——给量子力学以广阔天地的苏联物理学家

曹则贤†
(中国科学院物理研究所　北京　100190)

2025－02－11收到
† email：zxcao@iphy.ac.cn
DOI：10.7693/wl20250607
CSTR：32040.14.wl20250607

摘　要　苏联物理学家弗拉基米尔·福克是那种名下有个人学派的学者，第一时间跟上了量子力学的发展，赋予了量子力学一片广阔天地。福克空间/福克态为量子力学多体理论提供了表示，福克方法(Hartree—Fock method)让量子力学广泛应用于实际问题的近似计算，而将量子力学波函数变换同电磁场规范变换结合到一起催生规范场论更是神来之笔。

关键词　福克空间，福克态，福克表示，福克算符，第二量子化，哈垂—福克方法，量子场论，规范场论

0　福克其人

量子力学曾被称为Knabenphysik(小伙子物理学)，这里的小伙子应该是指约当、海森堡、泡利、狄拉克以及冯·诺伊曼，笔者觉得应该也算上福克。苏联物理学家福克(Влади́мир Алекса́ндрович Фок，1898—1974)赶上了创立量子力学的伟大时代，在量子力学、量子电动力学和规范场论方面都做出了奠基性的工作。

福克1898年出生于圣彼得堡，1922年从圣彼得堡州立大学毕业，接着在原校读研究生，1932年成为教授。福克的研究领域包括广义相对论(特别是相对论多体理论)、量子力学(特别是量子多体理论)、光学以及连续介质力学等。以量子力学研究而论，福克1926年得到了Klein—Gordon方程，1927年将波函数变换同电磁场规范变换相结合(这一年福克曾在哥廷恩和巴黎访问)，1930年得到了Hartree—Fock方法，在此语境下引入了福克算符。基于第二量子化方面的研究工作福克的名字还被用来命名福克态、福克空间与福克表示等概念。福克1932年就出版了《量子力学基础》一书，是关于量子力学的最初的几本专著之一，当然作为相对论大家他也有相对论专著。福克在量子力学、相对论和数学物理方面的成就与影响支撑起了他在列宁格勒(即圣彼得堡)的学派——福克和玻恩、索末菲以及后来的朗道等不多的几位是那种可以谦虚地说“my school (洒家的学派)”的人(图1)。福克经历过一战到二战的苏俄最动荡的时期，在一战中作为炮兵军官上前线因此损伤了听力，在1930年代几乎被清洗，但他却在很年轻时就成长为一流的理论物理学家。令笔者尤为感到惊讶的是，苏俄教育出来的福克在不

图1　福克(1898—1974)

到30岁的年纪就能娴熟地用德语、法语和英语发表关于相对论和量子力学的研究论文。

可能是因为很早就耳聋因而很少与外界有交流，或者还因为他后来致力于要建立马克思主义的相对论与量子力学，西文量子力学表述中对福克所带来的量子力学内容都只是客观地提及。

说明一下，本文采用“波方程”而非“波动方程”、“波力学”而非“波动力学”、“第二量子化”而非“二次量子化”、“非渡越定理”而非“绝热定理”的说法，详细的具体辩解会发表在其他合适的场合。

1 福克的量子力学著述

福克的部分量子力学研究论文罗列如下：

(1) Vladimir Fock, Zur Schrödingerschen Wellenmechanik (走向薛定谔的波力学), *Zeitschrift für Physik* 38, 242—250 (1926).

(2) Vladimir Fock, Über die invariante Form der Wellen- und Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt (带电粒子之波方程与运动方程的不变形式), *Zeitschrift für Physik* 39, 226—232(1926).

(3) Vladimir Fock, Bemerkung zur Quantelung des harmonischen Oszillators im Magnetfeld (关于磁场中谐振子量子化的说明), *Zeitschrift für Physik* 47, 446—448 (1928).

(4) Vladimir Fock, Über die Beziehung zwischen den Integralen der quantenmechanischen Bewegungsgleichungen und der Schrödingerschen Wellengleichung (论量子力学运动方程与薛定谔波方程各自积分之间的关系), *Zeitschrift für Physik* 49, 323—338 (1928).

(5) Vladimir Fock, Verallgemeinerung und Lösung der Diracschen statistischen Gleichung (狄拉克统计方程的推广与求解), *Zeitschrift für Physik* 49, 339—357 (1928).

(6) Max Born, Vladimir Fock, Beweis des Adiabatensatzes (非渡越定理证明), *Zeitschrift für Physik* 51, 165—180 (1928).

(7) Vladimir Fock, On “Improper” Functions in Quantum Mechanics, *JRPKhO* 61, 1 (1929).

(8) Vladimir Fock, Über den Begriff der Geschwindigkeit in der Diracschen Theorie des Elektrons (论电子的狄拉克理论中的速度概念), *Zeitschrift für Physik* 55, 127—140 (1929).

(9) Vladimir Fock, Sur les équations de Dirac dans la theorie de relativité Générale (广义相对论中的狄拉克方程), *Comptes Rendus* 189, 25—29 (1929).

(10) Vladimir Fock, D. Ivanenko, Géométrie quantique linéaire et déplacement paralléle (线性量子几何与平行位移), *Comptes Rendus* 188, 1470—1472 (1929).

(11) Vladimir Fock, L’équation d’onde de Dirac et la géométrie de Riemann (狄拉克的波方程与黎曼几何), *Le Journal de Physique et de Radium*, Serie VI, 10, 392—405 (1929).

(12) Vladimir Fock, D. Ivanenko, Über eine mögliche geometrische Deutung der relativitischen Quantentheorie (论相对论量子理论的一个可能诠释), *Zeitschrift für Physik* 54, 798—802 (1929).

(13) Vladimir Fock, Geometrisierung der Diracschen Theorie des Elektrons (电子的狄拉克理论的几何化), *Zeitschrift für Physik* 57, 261—277 (1929).

(14) Vladimir Fock, Bemerkung zum Virialsatz (维里定律的说明), *Zeitschrift für Physik* 63, 855—858 (1930).

(15) Vladimir Fock, Näherungsmethode zur Lösung des quantenmechanischen Mehrkörperproblems (求解量子多体问题的近似方法), *Zeitschrift für Physik* 61, 126—148 (1930).

(16) Vladimir Fock, “Self consistent field” mit Austausch für Natrium (钠的带交换作用的“自洽场”), *Zeitschrift für Physik* 62, 795—805 (1930).

(17) Pascual Jordan, Vladimir Fock, Neue Unbestimmtheitseigenschaften des elektromagnetischen Feldes (电磁场的新不确定性质), *Zeitschrift für Physik* 66, 206—209 (1930).

(18) Vladimir Fock, Konfigurationsraum und zweite Quantelung (构型空间与第二量子化), *Zeitschrift für Physik* 75, 622—647 (1932).

(19) V. Fock, B. Podolsky, On Dirac's Quantum Electrodynamics, *Phys. Zs. Sowjetunion* 1, 798 (1932).

(20) Vladimir Fock, On Quantization of Electromagnetic Waves and Interaction of Charges in Dirac Theory, *Phys. Zs. Sowijetunion* 1, 798 (1932).

(21) P. A. M. Dirac, Vladimir Fock, Boris Podolsky, On Quantum Electrodynamics, *Phys. Zs. Sowjetunion* 2, 468 (1932).

(22) Vladimir Fock, Über Austauschenergie (论交换能), *Zeitschrift für Physik* 81, 195—208 (1933).

(23) Vladimir Fock, On the Theory of Positrons, *DAN*, N6, 265 (1933).

(24) Vladimir Fock, An Approximate Representation of the Wave Functions of Penetrating Orbits, *DAN*, N5, 241 (1934).

(25) Vladimir Fock, On Quantum Electrodynamics, *Phys. Zs. Sowjetunion* 6, 425 (1934).

(26) Vladimir Fock, Zur theorie des Wasserstoffatoms (氢原子理论), *Zeitschrift für Physik* 98, 145—154 (1935).

(27) Vladimir Fock, Extremal Problems in Quantum Theory, *UFN* 15, 341 (1935).

(28) Vladimir Fock, The Method of Functionals in Quantum Electrodynamics, *UZ LGU* 17, 267 (1937).

(29) Vladimir Fock, Proper Time in Classical and Quantum Mechanics, *Izv. AN* 4-5, 551 (1937).

(30) Vladimir Fock, M. G. Veselov, M. I. Petrashen, Incomplete Separation of Variables for Divalent Atoms, *JETP* 10, 723 (1940).

(31) Vladimir Fock, On the Wave Functions of Many-Electron Systems, *JETP* 10, 961 (1940).

(32) Vladimir Fock, N. Krylov, On the Uncertainty Relation between Time and Energy, *JETP* 17, 93 (1947).

(33) Vladimir Fock, Application of Two-Electron Functions in the Theory of Chemical Bonds, *DAN* 73, 735 (1950).

(34) Vladimir Fock, On the Schrödinger Equation of the Helium Atom, *Izv. AN* 18, 161 (1954).

(35) Vladimir Fock, On the Interpretation of Quantum Mechanics, *UFN* 52, 461(1957).

(36) Vladimir Fock, On the Canonical Transformation in Classical and Quantum Mechanics, *UZ LGU* 16, 67 (1959).

这其中有一些苏联时期杂志上的文章笔者没能找到原文版本，可能信息不确，英文版可参见福克的文选(见下)。从列表中我们看到福克在年轻时就能用德语、法语和英语等非母语发表研究论文，这让多少一辈子用母语都未发表过一篇通顺论文的著名科学家汗颜。此外，偏处列宁格勒一隅的福克能与玻恩、德布罗意和狄拉克这些人都合作发表过论文，其实力由此可见一斑。福克有一点和玻恩、泡利与狄拉克相仿佛，就是用相对论的功底做量子力学，这一点愚以为是在讲述量子力学构造时应该提请人们注意的。

福克的著作有：

(1) В. А. Фок, *Начала квантовой механики* (量子力学基础), Ленинград (1932); 第二版, Мир (1976); 英文版为 Vladimir Fock, *Fundamentals of Quantum Mechanics*, Mir Publishers (1986).

(2) В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, Москва (1955). 英译本为 Vladimir Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation*, Pergamon (1958).

(3) В. А. Фок, *Квантовая физика и строение материи* (量子物理与物质结构), Ленинград Университет (1965).

(4) В. А. Фок, *Квантовая физика и философские проблемы* (量子物理与哲学问题), Мир (1970).

其中的《量子力学基础》一书(图2)，笔者确信它位列人类量子力学专著前十(见下)。前述提及的

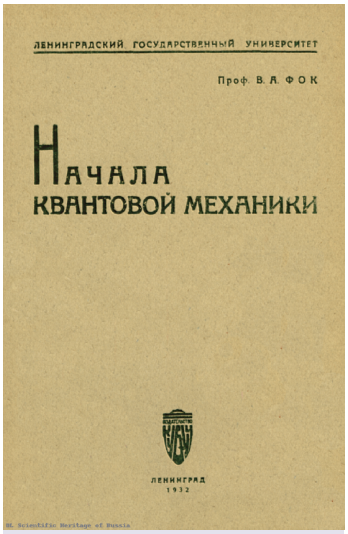


图 2 福克 1932 年即出版的《量子力学基础》

不容易找到的一些前苏联时期杂志上的论文，可以在福克的文选[L. D. Saddeev, L.A. Khalfin, I. V. Komarov (eds.), *Vladimir Fock, Selected Works: Quantum Mechanics and Quantum Field Theory*, CRC Press (2004)]中找到。

2 福克对创立量子力学的贡献

福克从1926年起发表量子力学论文，第一篇为《走向薛定谔波力学》。福克对薛定谔1926年创立波力学的论文是即时响应的，收稿日期为1926年6月11日，而薛定谔论文第三部分的收稿日期为5月10日，第四部分为6月21日，故福克参考的是薛定谔论文的前两部分。量子力学初创时期这种对他人新理论的即时响应，反映的是这些人经典力学和数学物理功底极为扎实的事实。当然，世界范围内参与量子力学构造的也就十人左右，那时候还没有产生专业的瞎起哄科学家。创立量子力学这种研究，其门槛多少还是有一点儿高度的。

2.1 推广薛定谔的波方程

在《走向薛定谔波力学》一文中福克指出，薛定谔波方程容易推广到拉格朗日函数包含速度线性项的情形。薛定谔的方程可看作波力学的基本方程，是普通力学之哈密顿—雅可比偏微分方程的替代(die als Grundgleichung der “undulatorischen” Mechanik und als Ersatz der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung der gewöhnlichen Mechanik anzusehen ist)。薛定谔在文中写道：“在相对论力学中，且也考虑了磁场，哈密顿—雅可比方程的表达内容更复杂。在单电子的情形其断言，四维作用函数的梯度，撇开一个给定的矢量(四矢量势)，贡献为常量。对此断言的波力学翻译相当困难。”不过，这些困难是可以克服的。

经典哈密顿—雅可比方程为 $H\left(q_i,\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial W}{\partial t}=0$。作替换：

$$\frac{\partial W}{\partial t}\to -E=-E\frac{\partial\psi}{\partial t}/\frac{\partial\psi}{\partial t},\ \frac{\partial W}{\partial q_i}\to -E\frac{\partial\psi}{\partial q_i}/\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

其中 E 可看作是能量，再乘上 $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$，就得到一个关于 $\frac{\partial\psi}{\partial q_i}$，$\frac{\partial\psi}{\partial t}$ 的二次型：

$$Q=\frac{1}{2}\sum_{k=1}\sum_{i=1}Q^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}+\frac{\partial\psi}{\partial t}\sum_i P^i\frac{\partial\psi}{\partial q_i}+R\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2,$$

为了创立波方程，考察积分 $J=\int Q\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t$，积分为对整个坐标空间以及对时间在任意间隔 t_2-t_1 上的积分。令积分的变分为0，即 $\delta\int Q\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t=0$，对此可以要求 $\delta\psi$ 在坐标的边界上或者只在时间点 t_2，t_1 上为0。波方程的具体形式最好在具体例子中表达。如果追求周期解，可以设 $\psi=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\nu t}\psi_1=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}Et/h}\psi_1$，得到 ψ_1 要满足的方程，能量 E 在其中以参数形式出现，在非相对论力学中其是线性的。在周期解的情形，$\psi=const.\ \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}W/h}$，可直接往哈密顿—雅可比方程中代入 $\frac{\partial W}{\partial q_i}$。

接下来福克用四个例子，即：(1)磁场中的开普勒运动；(2)电子在核电荷之静电场以及偶极磁场下的运动；(3)相对论开普勒运动；以及(4)斯塔克效应，展示了具体的推导过程。其中，在“相对论开普勒运动”一节中得到的波方程为 $\nabla^2\psi=$

$E^{-2}\left[2mE+\frac{E^2}{c^2}+2\left(m+\frac{E}{c^2}\right)\frac{e^2}{r}+\frac{e^4}{c^2r^2}\right]\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$，也被当作对薛定谔方程的相对论推广。

2.2 引出规范场论的不变变换

外尔的“引力与电”[Hermann Weyl, Gravitation und Elektricität, *Sitzsber. Preuss. Akad. Berlin*, 465—478 (1918)]一文试图构造引力与电的统一理论，但招致了爱因斯坦的激烈批评，后者指出该理论会造成长度依赖于历史的问题。虽然薛定谔1922年在“单电子量子轨道的一个值得关注的性质”[Erwin Schrödinger, Über eine Bemer-kenswerte Eigenschfat der Quantenbahnen eines einzelnen Elektrons, *Zeitschrift für Physik* 12, 12—23(1922)]一文中通过引入因子$\gamma=\frac{h}{2\pi\sqrt{-1}}$化解了这个困局，但是并没有因此有更多的进展(参阅拙著《云端脚下》)。{笔者想强调以下个人对这个公式之于量子论的意义的认识。首先，它第一次暗示量子论中作用量子h要以虚数的面目出现，此对理解量子力学具有至关重要的意义。关于这一点笔者未见有文献强调；其次，它让笔者理解了$\sqrt{-1}$必须同时等于±i。如果不是这样，你就不能理解为什么量子数$(nlm;m_s)$中的m其取值为$m=-l,-l+1,\cdots,0,\cdots l-1,l\}$。1926年，福克凭借“带电粒子之波方程与运动方程的不变形式”一文(收稿日期为1926年7月30日)为外尔的理论带来了新生，直接催生了规范场论。在这篇文章中，福克将量子力学的波函数变换同经典的电磁场规范变换结合到了一起。

福克指出，在五维空间中，薛定谔波方程可以写成不变的拉普拉斯方程，而运动方程写成测地线方程(Die Schrödingersche Wellengleichung wird als invariante Laplacesche Gleichung und die Bewegungsgleichungen als diejenigen einer geodätischen Linie im fünfdimensionalen Raum geschrieben)。第五坐标参数适于将薛定谔方程和力学方程表示为不变形式。

带电质点的拉格朗日量为

$$L=-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}-e\varphi\ ,$$

相应的哈密顿—雅可比方程为

$$(\nabla w)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2-\frac{2e}{c}\left(\boldsymbol{A}\cdot\nabla w+\frac{\varphi}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+m^2c^2+\frac{e^2}{c^2}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}-\varphi^2)=0\ .$$

根据此前用过的假设(见上节)，令$\nabla w=\nabla\psi/\frac{\partial\psi}{\partial p}$，$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial t}/\frac{\partial\psi}{\partial p}$，其中参数$p$的量纲为作用量，乘以$\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2$可以得到一个二次型：

$$Q=(\nabla\psi)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2-\frac{2e}{c}\frac{\partial\psi}{\partial p}\left(\boldsymbol{A}\cdot\nabla\psi+\frac{\varphi}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\left[m^2c^2+\frac{e^2}{c^2}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}-\varphi^2)\right]\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2\ .$$

我们注意到$\frac{\partial\psi}{\partial p}$的零次、一次和二次幂的系数都是四维变换不变的。进一步地，如下变换：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\nabla f\ ,$$
$$\varphi=\varphi_1-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\ ,$$
$$p=p_1-\frac{e}{c}f\ ,$$

保形式Q不变，其中f是时空坐标的任意函数。上述变换也让线性微分形式：

$$\mathrm{d}'\Omega=\frac{e}{mc^2}(A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z)-\frac{e}{mc}\varphi\mathrm{d}t+\frac{1}{mc}\mathrm{d}p$$

不变。现在，我们将形式Q看作函数ψ在五维空间中的梯度之平方，找寻对应的线元。容易发现，有$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2-c^2\mathrm{d}t^2+(\mathrm{d}'\Omega)^2$。

五维空间中的拉普拉斯方程为

$$\Delta\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{2e}{c}\left(\boldsymbol{A}\cdot\nabla\frac{\partial\psi}{\partial p}+\frac{\varphi}{c}\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial p}\right)-\frac{e}{c}\frac{\partial\psi}{\partial p}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\left[m^2c^2+\frac{e^2}{c^2}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}-\varphi^2)\right]\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2=0\ ,$$

它在洛伦兹变换和前述变换下不变。因为方程的系数不含有系数p，可以把函数ψ对p的依赖关系写成指数因子形式，$\psi=\psi_0\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}p/h}$，这里的$\psi_0$只满

足洛伦兹变换。多出来的这个坐标参数p看似正好可这样诠释，其作用是在四维势上加上一任意梯度使得方程不变(er die Invarianz der Gleichungen in bezug auf die Addition eines beliebigen Gradienten zum Vierergotential bewirkt)。

进一步假设，系数不依赖于时间t, $\psi_0 = \psi_1 e^{-2\pi i(E+mc^2)t/h}$，其中$E$是玻尔能级(die Bohrschen Energieniveaus)。由上述考量可得结论，四矢势加一梯度对能级没有影响，两个矢量势$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A} - \nabla f$对应的函数$\psi_1$和$\psi'_1$只差一个相因子$e^{2\pi i f/ch}$。

用当代常用记号，福克文中的前述变换可表示为

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi \ ,$$
$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \ ,$$
$$\psi \to \psi' = \psi e^{ie\chi/\hbar c} \ ,$$

其中$\left(\boldsymbol{A}; \frac{1}{c}\varphi\right)$是电磁4矢势，$\psi$是电子的波函数。这是引入规范场论过程中至关重要的一步。接下来，外尔于1929年发表了“电子与引力”[Hermann Weyl, Elektron und Gravitation, *Zeitschrift für Physik* 56, 330—352 (1929)]一文，为规范场论续了命。

2.3 Hartree—Fock方法

作为一种很寻常的二阶微分方程，量子力学波方程几乎很少有严格可解的情形，倘若不发展出有效的近似方法，量子力学的意义会大打折扣。Hartree—Fock方法就是一种比较有效的计算多体系统波函数的方法，本质上是一种自洽场近似，最初由英国物理学家哈垂(Douglas Hartree, 1897—1958)在1928年的一篇文章[D. Hartree, The Wave Mechanics of an Atom with a Non-Coulomb Central Field, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 24 (1), 111 (1928)]中提出。斯拉特(John Clarke Slater, 1900—1976)和冈特(John Arthur Gaunt, 1904—1944)独立证明了将变分原理应用于单粒子波函数之积这样的预设(Ansatz)可以得到Hartree方程[J. C. Slater, The Self Consistent Field and the Structure of Atoms, *Physical Review* 32(3), 339—348(1928); J. A. Gaunt, A Theory of Hartree's Atomic Fields, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 24(2), 328—342(1928)]。1930年斯拉特注意到哈垂方法中未关注多粒子的统计问题[J. C. Slater, Note on Hartree's Method, *Physical Review* 35(2), 210—211 (1930)]，福克也在1930年的“解量子多体问题的近似方法”一文中深入讨论了该问题(在1929年底以俄文报告过)。把反对称波函数表示为矩阵determinant的形式，是斯拉特1929年引入的[J. C. Slater, The theory of complex spectra, *Physical Review* 34, 1293—1323, 1929]，故也称Slater determinant (讨论见后)。

福克指出，变分原理给出构型空间上的波方程，从预设解$\Psi(r_1, r_2, \cdots, r_N) = \varphi_a(r_1)\varphi_a(r_2)\cdots\varphi_k(r_N)$可以得到哈垂方程。此预设解未顾及波函数的对称性问题。经过将预设解改为Slater determinant形式，得到的关于$\varphi_i(r)$的方程可以看作是将能量作为作用积分的三维变分问题所得到的欧拉方程(können als Eulersche Gleichungen eines dreidimensionalen Variationsproblems mit der Energie als Wirkungsintegral aufgefaßt werden)，所得方程比哈垂方程没复杂多少，但结果更精确。所得的谱线强度公式包含对应量子跃迁所造成的内电子重组(welche einer “Umgruppierung” der inneren Elektronen bei einem Quantensprung entsprechen)项。福克紧接着在“钠的带交换作用的‘自洽场’”一文中具体地演示了他的近似方法。

这套用单粒子波函数构造多粒子体系波函数的预设形式，然后用变分法得到一个迭代方程的方法，后来被称为Hartree—Fock方法。可简略总结如下。一个多粒子体系，设想有N个电子和M个原子实，采用Born—Oppenheimer近似，则哈密顿量可以写为

$$H = \sum_{i=1\cdots N}\left(-\frac{1}{2}\nabla_i^2 - \sum_{k=1\cdots M}\frac{Z_k}{r_{ik}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j=1\cdots N}\frac{1}{r_{ij}} \ .$$

求解此哈密顿量的本征函数显然是一个不可分离变量的问题。哈垂引入了一种自洽场方法。作为第一步，考虑非相互作用的多电子体系，$H =$

$\sum_i h_i$，其中 $h_i = -\frac{1}{2}\nabla_i^2 + V(r_i)$。可以假设解为单粒子哈密顿量本征函数的简单积，

$$\Psi(r_1, r_2, \cdots, r_N) = \varphi_a(r_1)\varphi_a(r_2)\cdots\varphi_k(r_N)\ ,$$

相应的能量本征值为 $E_0 = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \cdots + \varepsilon_k$。接下来，把电子之间的相互作用项作为扰动处理。

哈垂的方法在摄动论上往前迈进了好几步，本质上是采用了变分法。假设每个电子都由一个包含来自原子实和其他电子的单粒子薛定谔方程所支配。由0-阶近似开始，即单电子置于原子实下的哈密顿量为 $h_i = -\frac{1}{2}\nabla_i^2 - \sum_{k=1\cdots M}\frac{Z_k}{r_{ik}}$，变分法计算试探函数里的参数得到波函数 $\varphi_i^{(0)}$；下一步计算让哈密顿量 $h_i + \sum_{i\neq j}\int \mathrm{d}\, r_j \frac{|\varphi^{(0)}(r_j)|^2}{r_{ij}}$ 最小的变分参数，得到波函数 $\varphi_i^{(1)}$；这样就形成了迭代关系。这是最初的哈垂的方法。

哈垂方法的一个内在缺陷是它没考虑统计性质的限制。福克与斯拉特做了进一步发展。斯拉特引入了反对称的波函数预设，形式上对应矩阵的determinant：

$$\Psi(r_1,\cdots,r_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix} \phi_1(r_1) & \phi_2(r_1) & \cdots & \phi_N(r_1) \\ \phi_1(r_2) & \phi_2(r_2) & \cdots & \phi_N(r_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_1(r_N) & \phi_2(r_N) & \cdots & \phi_N(r_N) \end{vmatrix},$$

最小化总能 E 等价于解算符

$$f_i = h_i + \sum_{j\neq i}[J_j(i) - K_j(i)]$$

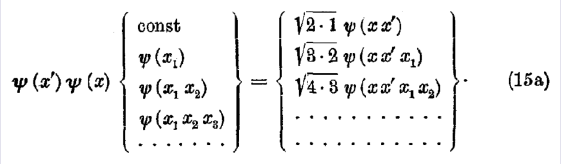
的本征值问题，其中

$$J_j(i)\phi_i(r_i) = \left[\int \mathrm{d}r_j \phi_j^*(r_j)\frac{1}{r_{ij}}\phi_j(r_j)\right]\phi_i(r_i)$$

是库仑作用项，而多出来的 $K_j(i)\phi_i(r_i) = \left[\int \mathrm{d}r_j \phi_j^*(r_j)\frac{1}{r_{ij}}\phi_i(r_j)\right]\phi_j(r_i)$ 是交换项，是福克的文章引入的。此过程中的哈密顿量 f_i 称为 Fock operator。

2.4 福克态与福克空间

福克空间是从单粒子希尔伯特空间 H 构造的某个变量或者未知数目的全同粒子体系的量子态空间。严格说来，福克空间是单粒子希尔伯特空间 H 以张量幂的形式的对称或反对称张量直和(的希尔伯特空间完备化)，这话有点儿绕，用公式表示则为 $F_\nu(H) = \overline{\oplus_{n=0,\cdots\infty} S_\nu H^{\otimes n}}$，其中 S_ν 是对称或者反对称化某张量的算符{对应计算矩阵determinant 和permanent时的系数集，见下文的补充说明}。对每一个希尔伯特空间 H 的基，存在一个福克空间的自然的基，即福克态(Fock state)。福克态也叫粒子数态，乃是具有确定粒子数的状态。量子态的粒子数表示始于狄拉克处理玻色子体系 [P. A. M. Dirac, The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proceedings of the Royal Society of London* A114, 243—265(1927)] 和约当与维格纳处理费米子体系 [Pascual Jordan, Eugene Wigner, Über das Paulische Äquivalenzverbot (论泡利的等价禁制), *Zeitschrift für Physik* 47, 631—651(1928)]的工作。福克态在量子力学的第二量子化表述中扮演着重要的角色。福克空间里的一个量子态，如果是占据数基的一个元素，则称为福克态。记福克态为 $|n_{k_1}, n_{k_2}, \cdots n_{k_i}\cdots\rangle$，其中 n_{k_i} 是 k_i 态上的粒子数。



$$\psi(x')\psi(x)\left\{\begin{array}{l}\text{const}\\ \psi(x_1)\\ \psi(x_1\,x_2)\\ \psi(x_1\,x_2\,x_3)\\ \cdots\cdots\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\sqrt{2\cdot 1}\,\psi(x\,x')\\ \sqrt{3\cdot 2}\,\psi(x\,x'\,x_1)\\ \sqrt{4\cdot 3}\,\psi(x\,x'\,x_1\,x_2)\\ \cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}. \qquad (15a)$$

图3 福克1932年文章“构型空间与第二量子化”p.640上的截图

1932年，福克发表了“构型空间与第二量子化”一文，研究量子化波函数的方法与构型空间方法之间的关系(图3)。文章的内容福克于1931年1月即在列宁格勒大学报告过。量子化波函数的方法与寻常的在构型空间上的波函数方法等价已是众所周知的，但两者间的紧密关系还未受到足够的关注。两者是密切关联的，用量子化波函数的计算在每一个阶段上都可以直接转到构型空间上去(man in jedem Stadium der Rechnung mit gequantelten Wellenfunktionen unmittelbar zum Konfigurationsraum übergehen kann)。用第二量子化方

法容易推导出哈垂方程。

福克的这篇26页的文章分成两部分，第一部分是对已有结果的重新推导，参考的论文包括：(1)引入第二量子化(无相互作用的玻色统计)的P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London* A114, 243 (1927); (2)处理带相互作用的玻色统计的P. Jordan, O. Klein, *Zeitschrift für Physik* 45, 751 (1927); P. Jordan, *Zeitschrift für Physik* 45, 766 (1927); (3)处理费米统计的P. Jordan, *Zeitschrift für Physik* 44, 473 (1927); P. Jordan, E. Wigner, *Zeitschrift für Physik* 47, 631 (1928)。第二部分考察量子化波函数($\boldsymbol{\Psi}$-算符)的对易关系，发现一些作用到关于粒子数为$1,2,\cdots n$的寻常波函数上的算符具有这样的性质，即$\boldsymbol{\Psi}$-算符可在构型空间中表示，$\boldsymbol{\Psi}$-算符的时间依赖薛定谔方程可以写成一系列针对粒子数为$1,2,\cdots n$的寻常薛定谔方程(die zeitabhängige Schrödingergleichang für die $\boldsymbol{\Psi}$-Operatoren als eine Folge von gewöhnlichen Schrödingergleichungen für $1,2,\cdots n$ Teilchen geschrieben werden kann)。作为应用案例，容易用之简单地推导哈垂方程。

在回顾了如何构造量子化波函数算符以及得到相应的粒子占据数为变量的波函数以后，福克指出，从量子化振幅到量子化波函数的过渡呈现了一个单粒子变量的酉正则变换[Der Übergang von den gequantelten Amplituden a_r (oder b_r im Falle der Bosestatistik) zu den gequantelten Wellenfunktionen $\psi(x)$ stellt eine unitäre kanonische Transformation der Variablen des einen Teilchens dar].

描述一个n-个全同粒子系综，波函数为$\psi(x_1x_2\cdots x_n;t)$，x_i是粒子的所有维度的空间坐标。通过一个正则变换，从所有原始的变量x过渡到一具有分立值的新变量E，$E=E^{(1)},E^{(2)},\cdots E^{(r)},\cdots$，其可以看作是具有分立谱的算符的本征值。记相应的本征函数为$\psi_r(x)=\psi(E^{(r)},x)$，则原来的(系综)波函数与变换了的波函数$c(E_1,E_2,\cdots E_n;t)$(transformierte Wellenfunktion)通过下式相联系，

$$\psi(x_1x_2\cdots x_n;t)=\sum_{E_1,E_2,\cdots E_n}c(E_1,E_2,\cdots E_n;t)\times\psi(E_1,x_1)\cdots\psi(E_n,x_n)\ ,$$

其中的求和变量$E_1,E_2,\cdots E_n$历经所有的本征值。

由$\psi(x_1x_2\cdots x_n;t)$满足的薛定谔方程可以推导$c(E_1,E_2,\cdots E_n;t)$满足的薛定谔方程(略)。对于对称的情形，为了确立$c(E_1,E_2,\cdots E_n;t)$的值，这里的能量$E_1,E_2,\cdots E_n$对应本征值里的$E^{(r_1)},E^{(r_2)},\cdots E^{(r_n)}$，只需要确立能量$E^{(1)},E^{(2)},\cdots E^{(r)},\cdots$出现的次数$n_1,n_2,\cdots n_r,\cdots$就行，因此有：

$$c(E_1,E_2,\cdots E_n;t)\to c(r_1,r_2,\cdots r_n;t)=c^*(n_1,n_2,\cdots;t)\ ,$$

{注意，这个c^*表示一个新记号而已，不是共轭符号}。

一个数列$n_1,n_2,\cdots n_r,\cdots$对应数值体系$r_1,r_2,\cdots r_n$，而不论其排序(Reihenfolge)。举例来说，$c(4,4,5)=c(4,5,4)=c(5,4,4)=c^*(0,0,0,2,1,0,0\cdots)$ {有2个粒子占据第4单粒子态，1个粒子占据第5单粒子态}。归一化条件：

$$\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_n}|c(r_1,r_2,\cdots,r_n;t)|^2=1\ ,$$

可一路推导得到：

$$\sum_{n_1,n_2,\cdots}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots}|c^*(n_1,n_2,\cdots;t)|^2=1\ .$$

对于费米子的情形，略复杂一点，可以一个例子说明，比如$c(1,4,5)=-c(4,1,5)=c^*(1,0,0,1,1,0,0\cdots)$ {占据任何单粒子态的粒子数目不超过1，波函数反对称}。

把计及了组合问题的$c^*(n_1,n_2,\cdots;t)$记为$f(n_1,n_2,\cdots)$。将玻色子和费米子的情形分开处理，先考虑玻色子的情形。有意地引入算符U_r，$U_rf(n_1,n_2,\cdots n_r,\cdots)=f(n_1,n_2,\cdots n_r+1,\cdots)$，它不对应酉矩阵。$U_r^\dagger U_r=1$，$U_rU_r^\dagger\neq1$。最后发现函数$f(n_1,n_2,\cdots n_r,\cdots)$满足薛定谔方程，不过哈密顿量变成了新的形式：

$$\mathcal{H}=\sum_{pr}b_p^+\langle p|H|r\rangle b_r+\frac{1}{2}\sum_{pr}b_p^+b_q^+\langle pq|G|rs\rangle b_sb_r\ ,$$

其中$b_r=U_r\sqrt{n_r}$，满足$b_rb_s^+-b_s^+b_r=\delta_{rs}$。借助算符$b_r$构造量子化波函数，$\boldsymbol{\Psi}(x)=\sum_r b_r\psi_r(x)$，$\boldsymbol{\Psi}^+(x)=\sum_r b_p^+\overline{\psi_r}(x)$。

费米子情形大致照此办理。

引入本征值为 $n=0,1,2\cdots$ 的数算符 $N=\int \boldsymbol{\Psi}^{+}(x)\boldsymbol{\Psi}(x)\mathrm{d}x$，其中 $\boldsymbol{\Psi}(x)=\sum_{r} b_r\psi_r(x)$。所有的算符可以根据与 N 对易或不对易而分成两类。现在尝试关于所有与 N 不对易的算符的表示。将量子化波函数的对易关系表示为

$$\boldsymbol{\Psi}(x')\boldsymbol{\Psi}^{+}(x)-\varepsilon\boldsymbol{\Psi}^{+}(x)\boldsymbol{\Psi}(x')=\delta(x-x'),$$

$$\boldsymbol{\Psi}(x')\boldsymbol{\Psi}(x)-\varepsilon\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{\Psi}(x')=0\ ,$$

其中 $\varepsilon=\pm1$ 区分两种统计。可以得到 $N\boldsymbol{\Psi}-\boldsymbol{\Psi}(N-1)=0$。选择一个 N 是对角形式的表示，则 $(n-n'+1)\langle n|\boldsymbol{\Psi}|n'\rangle=0$，这表明 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 的矩阵形式为

$$\begin{vmatrix} 0 & \langle 0|\psi|1\rangle & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \langle 1|\psi|2\rangle & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \langle 2|\psi|3\rangle & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

每个矩阵元 $\langle n-1|\boldsymbol{\Psi}|n\rangle$ 都可看作算符。算符 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 的作用对象为

$$\begin{pmatrix} const. \\ \psi(x_1) \\ \psi(x_1x_2) \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

对具体的一个构型空间上的多粒子函数，作用结果为

$$\langle n-1|\boldsymbol{\Psi}|n\rangle\psi(x_1x_2\cdots x_n)=\sqrt{n}\,\psi(xx_1x_2\cdots x_{n-1})\ ,$$

可进一步改写为

$$\langle n-1|\boldsymbol{\Psi}|n\rangle\psi(x_1x_2\cdots x_n)=\frac{1}{\sqrt{n}}[\psi(xx_1x_2\cdots x_{n-1})+$$

$$\varepsilon\psi(x_1xx_2\cdots x_{n-1})+\cdots+\varepsilon^{n-1}\psi(x_1x_2\cdots x_{n-1}x)]\ .$$

这个算符的核(Kern)为

$$\langle n-1;x_1x_2\cdots x_{n-1}|\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x})|n\rangle\psi(n;\xi_1\xi_2\cdots\xi_n)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}[\delta(\xi_1-x)\cdots(\xi_n-x_{n-1})+\cdots+$$

$$\varepsilon^{n-1}\delta(\xi_1-x_1)\cdots(\xi_n-x)]\ ,$$

有了这个核，容易得到：

$$\langle n|\boldsymbol{\Psi}^{+}(x)|n-1\rangle\psi(x_1x_2\cdots x_n)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}[\delta(x_1-x)\psi(x_2\cdots x_n)+\cdots+$$

$$\varepsilon^{n-1}\delta(x_n-x)\psi(x_1x_2\cdots x_{n-1})]\ .$$

这样，就可进一步推演 $\boldsymbol{\Psi}(x')\boldsymbol{\Psi}(x)$，$\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{\Psi}(x')$，$\boldsymbol{\Psi}^{+}(x)\boldsymbol{\Psi}(x)$ 作用的结果，以及算符 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 的时间依赖和量子化的波方程。具体的方程形式太复杂，此处略，有兴趣的读者请参阅英文的福克文选或者第二量子化的专著。

3 多余的话

量子力学来自关于经典力学的Transformation (改造)和Undeutung (另解)，关键是如何让新理论einwandfrei (丝滑无矛盾)。福克对量子力学和量子场论的贡献，显示了他深厚的经典力学和数学物理的功底。笔者突然注意到，相对论的功底可能是有能力深入研究量子力学的前提，这一点在玻恩、约当、泡利、狄拉克和福克那儿都有体现。老一辈的索末菲在他表述波力学的著作中也体现了这一点。量子力学终究是数学物理的一个分支，这是它和相对论共享的一个气质。笔者想说，如果没有1924年的出自哥廷恩大学的《数学物理方法》一书，可能就没有后来的量子力学(索末菲、玻恩、约当和外尔都出自哥廷恩，而泡利、海森堡和福克也都在玻恩的门下刷过漆)。

福克对量子力学的贡献是多方面的，也是具有深远影响的。然而，由于一些不太明确的原因，关于福克其人及其对量子力学的贡献的叙述似乎过于客观、潦草了些。俄文文献里会说福克是Номинант на Нобелевскую премию по физике (物理奖的被提名人)，透着一点没必要的遗憾。索末菲及其门下弟子撑起了量子论和量子力学的大半个天空，其未能和弟子们同列一个奖项的名单未必不是对他的特别的尊重。

测量方可理解 (Lord Kelvin's dictum: To measure is to know)，推导才能创造。在学习量子力学的过程中，如果我们了解了背后的思想与目的，还能跟那些创造者一样(胡乱地)推导，我们可能

会学得扎实一点，甚至还能学会初步的研究功夫也未可知。学量子力学，宜手脑并用，一边思考，一边推导。

补充说明一：初创时期的量子力学专著

提醒读者注意，在量子力学初创时期有能力对量子力学系统地予以表述的，那才见真功夫。评价这个问题，以下几个事件可作为评价的时间参照，1924年玻恩造了量子力学一词，1925年构造了矩阵力学(玻恩—约当，玻恩—海森堡—约当)，1925年薛定谔提出气_体的概念(Gaskörper，对应固体，Festkörper)，1926年薛定谔构造了波力学，此时可以认定量子力学问世。第一波对量子力学的表述，因为是来自那些创造者本人，所以里面有真知。这样的著作，按面世时间排序，笔者知道的有：

(1) Hermann Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (群论与量子力学), S. Herzel (1928). 作者时年43岁。有英译本 *The group theory and quantum mechanics*。

(2) Louis de Broglie, *Mecanique ondulatoire* (波力学), Gauthier-Villars (1928). 作者时年36岁。

(3) Arnold Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*, *Wellenmechanischer Ergänzungsband* (原子构造与谱线之波力学补充本), Vieweg (1929). 作者时年61岁。这其实是独立于《原子构造与谱线》一书的关于波力学的表述，笔者就是从这本书弄懂原子中电子之量子数的来路细节的。

(4) P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics,* The Clarendon Press (1930). 作者时年28岁。

(5) Max Born, *Pascual Jordan, Elementare Quantenmechanik* (基础量子力学), Springer (1930). 作者时年分别为48岁和28岁。

(6) Eugene Wigner, *Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren* (群论及其在原子谱之量子力学上的应用), Vieweg (1931). 有英译本 *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*. 作者时年29岁。

(7) Влади́мир Алекса́ндрович Фок, *Начала квантовой механики* (量子力学基础), Ленингра́д (1932); 有英译本 Vladimir Fock, *Fundamentals of quantum mechanics*. 作者时年34岁。

(8) John von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (量子力学的数学基础), Springer (1932). 作者时年29岁。

(9) Bartel L. van der Waerden, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik* (量子力学中的群论方法), Springer (1932)。

(10) Wolfgang Pauli, Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik (波力学的一般原理), 1933. 作者时年33岁。这原是发表在 *Handbuch der Physik* 上的综述性文章，有单行本以及基于此而来的 *General Principles of quantum mechanics*。泡利还有1926年在 *Handbuch der Physik* 上的综述性文章 Quantentheorie (量子论)，可一起研读。

至于海森堡的 *The Physical Principles of the Quantum Theory*，Dover (1930)，是他人将其1929年访美时的讲座译成英文结集出版的；薛定谔的 *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Ox Bow Press (1995)，那是其1949—1955年间几个讲座的结集，都算不上量子力学专著。海森堡、薛定谔这两个量子力学标志性人物都没有对量子力学的表述，想来令人唏嘘，不知道是因为没有时间、没兴趣或者有时间有兴趣却力有不逮，或者干脆是不屑为之。各位仔细看看这些书的内容与面世时间，可能会多有感触。笔者的一个感触是，就所需数学而言，量子力学是薛定谔这个维也纳大学数学物理教授、波力学奠基人理解起来都吃力的一门学问(他的论文致谢了外尔在解氢原子问题上的帮助)。以泡利数学之强，其在构造泡利矩阵时也致谢了约当，说约当提请他注意四元数的虚部构成他要的自旋需满足的代数。爱因斯坦对量子论的贡献是多方面的、基础性的，但终究是庞加莱1912年给量子论一锤定音，其间的差距自然

是出在数学能力上。当然，从不喜欢数学的人可以认为构建量子力学没用到过数学，学懂量子力学也用不着数学。

在量子力学教学界比较有名的有弗吕格(Siegfried Flügge, 1912—1997)的习题集。弗吕格1933年在玻恩处获得博士学位，1956—1984年间编辑了 *Handbuch der Physik* 共54卷，理论物理功底深厚。流行的弗吕格习题集是Siegfried Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, Vols. 1-2, Springer (1971), 此为Siegfried Flügge, *Rechenmethoden der Quantentheorie: Elementare Quantenmechanik - Dargestellt in Aufgaben und Lösungen* (量子论的计算方法：用习题与解所表达的基础量子力学), Springer (1965)一书的英文版。实际上，早在1952年就有合著 Siegfried Flügge, Hans Marschall, *Rechenmethoden der Quantentheorie* (量子理论的计算方法), Springer (1952)。把这样的一本量子力学经典单纯理解成习题集，实在有些不够严肃。至于一般学者编辑的量子力学书，大体上多不过是《薛定谔方程在1926》，那是我们一般人学习量子力学时用到的参考资料，想来着实可叹。

补充说明二：作为矩阵immanant特例的determinant与permanent

量子力学的第一种面目是矩阵力学。一般量子力学教科书中涉及的矩阵内容似乎局限于矩阵的加、乘积、求转置共轭/逆、求本征值/本征矢量、计算迹与determinant等。参考玻恩—约当的第一篇矩阵力学文章以及狄拉克、泡利后续的文章，就知道矩阵力学要求的矩阵知识要深得多。不说那些一般量子力学教科书无力提及的矩阵知识，就常见的那几个矩阵概念，引入中文时的翻译似乎也欠考虑。比如，矩阵的determinant，汉译“矩阵值”就有点儿凑合，那是一不管determinant的字面意思，二不管其在代数方程中的原始角色，三不管如此翻译其与伴随概念是否还有关联。再说了，由矩阵可提取的确定的值多了，比如矩阵的迹(Spur, trace)，那也是一种矩阵值。

矩阵的determinant，还有permanent，是矩阵的一般函数immanant的常用特例。对于$n \times n$矩阵$A=(a_{ij})$，记$\lambda=(\lambda_1\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$为整数$n$的一个分剖(partition，统计力学里译成配分)，χ_λ是对称群(置换群)S_n的相应的不可约表示的特征值，则有：

$$\begin{aligned}\mathrm{Imm}_\lambda(A) &= \sum_{\sigma\in S_n}\chi_\lambda(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\chi_\lambda(\sigma)\prod_{i=1,n}a_{i\sigma(i)}.\end{aligned}$$

其中作为特例的determinant为$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\times\prod_{i=1,n}a_{i\sigma(i)}$，而作为特例的permanent为$\mathrm{perm}(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1,n}a_{i\sigma(i)}$.这两种情形下的求和系数都对应置换群$S_n$的一维不可约表示{那么问题来了。如果矩阵函数immanant总有determinant和permanent这两个特例，则意味着置换群S_n总至少有两个一维不可约表示。俺这个猜想可怎么证明呢？}这样看来，determinant, permanent和immanant这三个词要根据各自的字面意思、在矩阵代数语境中的意义以及它们各自在其他学科中的意义(如果有的话)统筹考虑来决定如何翻译才好。笔者一直不知道如何翻译矩阵的determinant和permanent，故本文中直接采用英文写法，请读者谅解。

用单粒子波函数矩阵来构造多粒子系统波函数(的预设，Ansatz)，针对满足狄拉克统计的粒子的取Slater determinant的形式，针对满足玻色统计的粒子的则取permanent的形式。提请读者朋友们注意，别见到permanent variational wave functions for bosons就翻译成“玻色子的永久变分波函数”，这里的permanent是名词，是矩阵的permanent。

参考文献

[1] Golub R, Lamoreaux S. The Historical and Physical Foundations of Quantum Mechanics. Oxford University Press, 2023

[2] van der Waerden B L. Sources of Quantum Mechanics. Dover Publications, 1968

[3] Tornetta G N. Mathematical Quantum Mechanics. Springer, 2022