

外尔——为量子力学带来数学“瘟疫”的人

曹则贤[†]

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

Ignoramus et ignorabimus¹⁾.

——Emil du Bois-Reymond

2025-02-20 收到

[†] email: zxciao@iphy.ac.cn

DOI: 10.7693/wl20250804

CSTR: 32040.14.wl20250804

摘 要 量子力学, 还有相对论, 是数学物理的重要分支。量子力学这样的学问只能产生于哥廷恩。外尔对量子力学的贡献是独特的, 既有作为铺垫的微分方程与算符本征值理论, 也有作为深化工具的群表示论。外尔关于量子力学的研究是同相对论研究相纠缠的, 因此能对狄拉克方程最终作出正确的诠释, 且一直是后续研究的灵感源泉。因为不为一般物理学家所理解, 以群论为底色的一些量子力学研究被当成了“群瘟”, 想来令人唏嘘。

关键词 量子力学, 相对论, 自伴随算符理论, 群论, 群瘟, 狄拉克方程, 外尔方程

0 外尔其人

科学史上有那么几位数学家, 他们随手做出的物理学成就, 是物理学大厦之大块基础, 或者是最壮观的组成部分。这样的数学家有牛顿、拉格朗日、欧拉、高斯、黎曼、希尔伯特、庞加莱等, 以及外尔。外尔是顶流的纯数学家, 他对相对论、量子力学的贡献是基础性的, 从他的物理研究还诞生了规范场论, 这个可以说是数学物理王冠上最璀璨的明珠。

外尔 (Hermann Weyl, 1885—1955) 1885 年出生于德国汉堡附近(图 1), 1904 年进入哥廷恩大学学数学, 老师包括当时的数学三驾马车希尔伯特、克莱因、闵可夫斯基。因为格外崇拜希尔伯特, 外尔发誓要研读希尔伯特的所有著作。1908 年外尔在希尔伯特指导下以积分方程方面的研究获得博士学位。接下来, 外尔于 1910 在哥廷恩完成 Habilitation, 1913 年前往苏黎世的瑞士联邦理工当教授, 在那里成了爱因斯坦的同事。1914 年爱因斯坦离开了瑞士联邦理工, 该校的理论物理课

受到削弱。1916 年外尔被免除兵役回到了瑞士联邦理工, 在数学研究与教学之外还承担起了讲授理论物理的责任。外尔 1917 年讲授广义相对论, 于是有了 1918 年的 *Raum, Zeit, Materie* (空间—时间—物质) 一书。这一年, 外尔还出版了 *Das Kontinuum* (连续统) 这部数学分析的经典。

在刚获得博士学位后的那几年, 外尔对自伴随算符及其本征值问题的研究做出了重要贡献{自



图1 青年外尔。这张照片让笔者脑海里冒出来一句“涵养智慧须趁早”

1) 我们无知, 我们还会无知下去。Emil du Bois-Reymond (1818—1896), 德国生理学家。

伴随算符、本征值，这可是量子力学的关键词}。在1920年代的头几年里，外尔体认到了群论的用处，他对广义相对论哲学基础的兴趣引导他研究连续群的表示与不变量的分析，迅速完成了经典李群的表述与不变量理论。可巧，1924年量子力学的概念被玻恩提出，到了1926年就初具雏形。凭借着超强的数学以及哲学功底，外尔取得了很多相对论和量子力学方面的基础性成就，并催生了规范场论。

外尔于1930年作为希尔伯特的继任者回到哥廷恩，但没多久就不得已离开了。1933年，外尔去到普林斯顿高等研究院任职，在那里工作生活直到1951年退休。退休后的外尔往来于普林斯顿和苏黎世之间。外尔一生笔耕不辍，留下了不少数理经典著作，深刻地影响了后来的数学与物理学的发展，他的那些富有哲学意味的散文或许还更有价值。

笔者从其他角度对外尔的介绍见于拙著《磅礴为一》。

1 外尔的著述

外尔在身前身后留下了不少专著，此处将笔者觉得同相对论和量子力学有直接关系的几本罗

列如下：

(1) Hermann Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (黎曼面的思想), Teubner (1913).

(2) Hermann Weyl, *Raum, Zeit, Materie* (空间—时间—物质), Springer (1918).

(3) Hermann Weyl, *Was ist Materie?* (物质是什么) Springer (1924).

(4) Hermann Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (数学哲学与自然科学), Oldenbourg (1927).

(5) Hermann Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (群论与量子力学), Hirzel (1928).

(6) Hermann Weyl, *The Open World*, Oxbow Press (1933).

(7) Hermann Weyl, *Mind and Nature*, University of Pennsylvania Press (1934).

(8) Hermann Weyl, *Elementary theory of invariants*, Institute for Advanced Study (1936).

(9) Hermann Weyl, *The classical groups-their invariants and representations*, Princeton University Press (1939).

(10) Hermann Weyl, *Symmetrie* (对称), Birkhäuser (1955). 有中译本。

这其中1928年的《群论与量子力学》一书对量子力学的发展影响最大(图2)，这是外尔基于他1927年的46页《量子力学与群论》一文以及他1927—1928学期讲授量子力学与群论的教案扩展而来的。

外尔是那种在量子力学出现之前就做出了一些成为量子力学基础的工作的数学家。他有几篇关于微分方程本征值问题的论文，而这是波力学的基本问题甚至在某些量子力学书里成了量子力学的化身。外尔论引力与电/电子的论文前前后后有7篇，因为同量子力学结合催生了规范场论，笔者认为也应该从量子力学的角度加以关注。此外，还有一些泛泛而谈的散文。大致说来，如下外尔的论文可能与量子力学有关：

(1) Hermann Weyl, *Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit Singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen* (有奇点的常线性微分方程

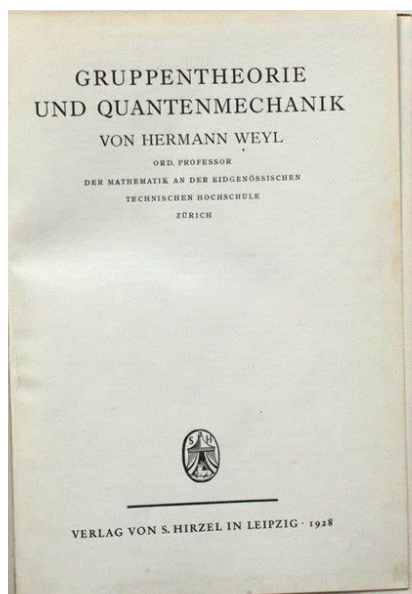


图2 外尔的经典著作 *Gruppentheorie und Quantenmechanik*

与本征函数), *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch physikalische Klasse*, 37—63 (1909); 442—467 (1910).

(2) Hermann Weyl, Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen (有奇点的常线性微分方程与所属的任意函数展开), *Mathematische Annalen* 68, 220—269 (1910).

(3) Hermann Weyl, Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte (本征值的渐近分布), *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch physikalische Klasse*, 110—117 (1911).

(4) Hermann Weyl, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (线性偏微分方程的本征值渐近分布律), *Mathematische Annalen* 71, 441—479 (1912).

(5) Hermann Weyl, Zur Charakterisierung der Drehungsgruppe (求转动群的特征), *Mathematische Zeitschrift* 17, 293—320 (1923).

(6) Hermann Weyl, Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen (连续单群的表示理论), *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 338—345 (1924).

(7) Hermann Weyl, Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung (张量计算的群论基础), *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch physikalische Klasse*, 218—224 (1924).

(8) Hermann Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen (连续半单群的线性变换表示理论), *Mathematische Zeitschrift*, I: 23, 271—309 (1925); II: 328—376 (1926); III: 24, 377—395 (1926); Nachtrag: 24, 789—791 (1926).

(9) Hermann Weyl, Zur Darstellungstheorie und Invariantenabzählung der projektiven, der Komplex

und der Drehungsgruppe (投射复转动群的表示论与不变量计数), *Acta Mathematica* 48, 255—278 (1926).

(10) Hermann Weyl, Elementare Sätze über die Komplex- und die Drehungsgruppe (复转动群的基本定律), *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch physikalische Klasse*, 235—243 (1926).

(11) F. Peter, H. Weyl, Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe (闭合连续群的原初表示的完备性), *Mathematische Annalen* 97, 737—755 (1927).

(12) Hermann Weyl, Sur la représentation des groupes continus (连续群表示), *L'Enseignement mathématique* 26, 226—239 (1927).

(13) Hermann Weyl, Quantenmechanik und Gruppentheorie (量子力学与群论), *Zeitschrift für Physik* 46, 1—46 (1927).

(14) Hermann Weyl, Der Zusammenhang zwischen der symmetrischen und der linearen Gruppe (对称群与线性群之间的关系), *Annals of Mathematics* 30, 499—516 (1929).

(15) Hermann Weyl, Kontinuierliche Gruppen und ihre Darstellungen durch lineare Transformationen (连续群及其线性变换表示), *Atti del Congresso internazionale dei Matematici Bologna* 1, 233—246 (1929).

(16) H. P. Robertson, H. Weyl, On a problem in the theory of groups arising in the foundations of infinitesimal geometry, *Bulletin of the American Mathematical Society* 35, 686—690 (1929).

(17) Hermann Weyl, The spherical symmetry of atoms, *The Rice Institute Pamphlet* 16, 266—279 (1929).

(18) Hermann Weyl, The problem of symmetry in quantum mechanics, *Journal of the Franklin Institute* 207, 509—518 (1929).

(19) Hermann Weyl, Zur quantentheoretischen Berechnung molekularer Bindungsenergien (分子结合能的量子论计算), *Nachrichten der Gesellschaft*

der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 285—294 (1930); II: 33—39 (1931).

(20) R. Brauer, H. Weyl, Spinors in n dimensions, *American Journal of Mathematics* 57, 425—449 (1935).

(21) Hermann Weyl, On the use of indeterminates in the theory of the orthogonal and symplectic groups, *American Journal of Mathematics* 63, 777—784 (1941).

(22) Hermann Weyl, Gravitation und Elektrizität (引力与电), *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 465—480 (1918).

(23) Hermann Weyl, Elektrizität und Gravitation (电与引力), *Physikalische Zeitschrift* 21, 649—650 (1920).

(24) Hermann Weyl, Electricity and gravitation, *Nature* 106, 800—802 (1921).

(25) Hermann Weyl, Gravitation and the electron, *PNAS* 15, 323—334 (1929).

(26) Hermann Weyl, Gravitation and the electron, *The Rice Institute Pamphlet* 16, 280—295 (1929).

(27) Hermann Weyl, Elektron und Gravitation (电子与引力), *Zeitschrift für Physik* 56, 330—352 (1929).

(28) Hermann Weyl, A remark on the coupling of gravitation and electron, *Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Lima* 11, 1—17 (1948).

(29) Hermann Weyl, A remark on the coupling of gravitation and electron, *The Physical Review* 77, 699—701 (1950).

(30) Hermann Weyl, Symmetry, *Journal of the Washington Academy of Sciences* 28, 253—271 (1938).

(31) Hermann Weyl, Mean motion, *American Journal of Mathematics* 60, 889—896 (1938); 61, 143—148 (1939).

(32) Hermann Weyl, Invariants, *Duke Mathematical Journal* 5, 489—502 (1939).

(33) Hermann Weyl, The mathematical way of thinking, *Science* 92, 437—446 (1940).

(34) Hermann Weyl, Feld und Materie (场与物质), *Annalen der Physik* 65, 541—563 (1921).

(35) Hermann Weyl, Was ist Materie (什么是物质)? *Die Naturwissenschaften* 12, 561—568; 585—593; 604—611 (1924).

(36) Hermann Weyl, Geometrie und Physik (几何与物理), *Die Naturwissenschaften* 19, 49—58 (1931).

(37) Hermann Weyl, Universum und Atom (宇宙与原子), *Die Naturwissenschaften* 22, 145—149 (1934).

2 外尔对量子力学的贡献

2.1 群论与量子力学

群论有四个起源,按时间顺序大致为:(1)经典代数(J. L. Lagrange, 1770);(2)数论(C. F. Gauss, 1801);(3)几何(F. Klein);(4)分析(S. Lie, 1874; H. Poincaré & F. Klein, 1876),这其中作为主角的高斯和克莱因都是哥廷恩大学的。出身哥廷恩、受哥廷恩数学三架马车亲炙的数学大家外尔自然也是群论的高手,在他求学的那个时段,数学(家)与物理学(家)在哥廷恩热切地融合着,而他的导师希尔伯特则是领军人物。在外尔作为纯粹数学家的研究科目中,群表示论是重点之一。当量子力学特别是波力学形式的量子力学出现以后,将群论引入量子力学是水到渠成的事情。用马后炮的观点来看,幸亏有群论的介入才让量子力学在原子、分子物理领域变得更加有用起来。

当群论被引入量子力学的初期,由于很多物理学家没学过群论(甚至没学过矩阵和算符理论),对接受群论是非常勉强的。使用群论做量子力学研究的,除了外尔,还有希尔伯特、冯·诺伊曼、诺特、维格纳、洪特、海特勒(Walter Heitler, 1904—1981)、沃顿(Barel Leendert

van der Waerden, 1903—1996)等人, 这些人都是来自哥廷恩大学的, [they] entered the picture with their “Gruppenpest” [见 *autobiography of John Slater*]. 用群瘟, Gruppenpest, 这个词指代当时的量子力学的群论研究, 可见当事人有多恼火。据信 1932 年埃伦费斯特就用过群瘟的说法。在 1932 年 9 月 22 日他向泡利抱怨, “就最近那么多可怕的‘群瘟-工作’我要向你提一大堆问题, 那玩意儿就没有一篇我哪怕能看懂第一页的, 虽然我很努力了 (Hingegen habe ich Ihnen ein dickes Bündel Fragen über die schrecklich vielen neuen ‘Gruppenpest-Arbeiten’ vorzulegen, von denen ich keine einzige auch nur über die ersten Blattseiten hinaus kapieren kann, obwohl ich mich sehr darum plage)”。埃伦费斯特的这种心情, 笔者大有同感, 因为笔者也不怎么懂群论。

外尔曾研究群表示理论并卓有成就。当量子力学稍具规模时, 外尔自然会认识到群论对量子力学的价值, 1927 年即发表了“量子力学与群论”一文(46 页)并在瑞士联邦理工讲授相关课程, 1928 年即完成经典著作 *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (群论与量子力学), 见图 2。这本 366 页的大部头, 为稍窥其端倪, 兹将其章节安排照录如下:

第一章 Unitäre Geometrie (酉几何)

第二章 Quantentheorie (量子论)

第三章 Gruppen und ihre Darstellungen (群及其表示)

第四章 Anwendung der Gruppentheorie auf die Quantenmechanik (群论之于量子力学的应用)

A. Drehungsgruppe (转动群)

B. Lorentz-Gruppe (洛伦兹群)

C. Gruppe der Vertauschungen (交换群)

D. Quantenkinematik (量子运动学)

第五章 Die symmetrische Permutationsgruppe und die Algebra der symmetrischen Transformationen (对称置换群与对称变换代数)

A. Allgemeine Theorie (通论)

B. Ausbau und physikalische Anwendung (构造与物理应用)

C. Explizite algebraische Durchführung (显式代数实现)

外尔对群论阐释的热情与努力是长期的。1939 年, 外尔又用英文撰写了 *Classical Groups* 这本经典著作。该书 315 页, 分为八章, 分别是:

第一章 Introduction

第二章 Vector invariants

第三章 Matric Algebras and group rings

第四章 The symmetry group and the full linear group

第五章 The orthogonal group

第六章 The symplectic group

第七章 Characters

第八章 General theory of invariants

此后问世的“群论与物理学”“给物理学家的群论”一类的书, 总会引用这本经典。

外尔的群论著作, 如他所言, 其宗旨是“我希望能更好地服务于物理读者而非仅仅指明那些提供他不感兴趣其内容的数学文献 (Dem physikalischen Leser hoffe ich damit mehr zu dienen als mit Hinweisen auf die mathematische Literaturihn nicht interessierenden Dingen bietet)”。不管外尔们如何努力, 想让学量子力学的人自觉学到群论表示的量子力学的地步, 看起来在世界范围内都不怎么成功。外尔在 1955 年还写了 *Symmetry* 一书, 可以算是一本普及类的书。这样的数学巨擘, 肯为世人写通俗的书, 殊为不易, 估计他是念念不忘让普通的一流科学家多少懂一点群论。尤其令笔者惊讶的是, 这本书里竟然用了我国成都文殊院的窗棂做插图(图 3)。文殊院建成至今 1400 年, 那套五边形—六边形交错的窗棂不知哪年安装的, 又是出自哪位巧匠之手。巧匠之匠心曝于闹市, 而路人习焉不察。二十世纪欧罗巴有位数学家洞晓其奥妙, 又将其广告天下, 这位巧匠若是泉下有知, 也足感欣慰了。

外尔关于群论的论述, 内容广博而深邃, 摘译三句两句的没有什么意义。读者诸君如能体会到群论之于表述和发展量子力学, 其实是于整个物理学的意义, 自然会自觉地补上群论的知识。群论之于量子力学的意义是什么呢? 外尔言道

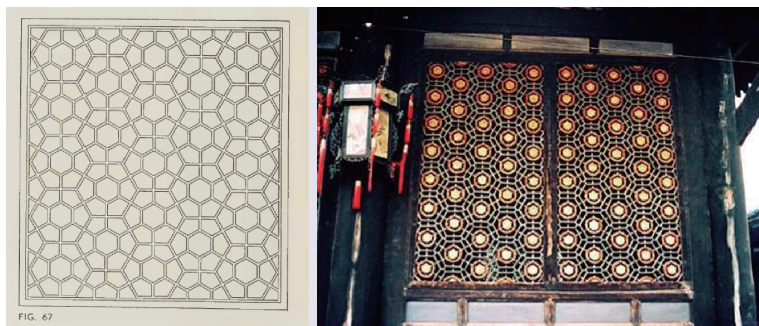


图3 外尔Symmetry一书的图67与成都文殊院窗棂照片

(1928): 群论观点之于获取一般规律的重要性最近在量子理论方面越来越明确了 (Die Wichtigkeit gruppentheoretischer Gesichtspunkte für die Gewinnung der allgemein gültigen Gesetze in der Quantentheorie ist in der letzten Zeit immer mehr offenbar geworden)。每一个物理量都用厄米特形式表示, 同一系统的所有物理量用同样变量 x_i 的厄米特形式表示。物理的困难的部分, 就是找到规则据此给物理量找到表示形式和矩阵 (Jede physikalische Größe wird repräsentiert durch eine Hermitesche Form, alle physikalischen Größen an demselben System durch Hermitesche Formen der gleichen Variablen x_i). Es ist der schwierigere Teil der Physik, die Regeln ausfindig zu machen, nach denen man zu einer physikalischen Größe die repräsentierende Form und ihre Matrix finden)。群论赋予我们实现这个目的的工具。

外尔运用群论于量子力学的一个重要成就见于对狄拉克方程的诠释, 关键的一步出现在1931年。外尔指出, 所谓的负能电子必须和正能电子具有同样的质量, 见于 *Quantenmechanik und Gruppentheorie* (量子力学与群论) 一书第二版第200页上的“过去与未来的交换 (*Vertauschung der Vergangenheit und Zukunft*)”一节。在构造导出狄拉克方程的作用量时, 是要求左右交换不变的 (坐标和电磁势都加负号)。狄拉克注意到, 如果同时还将质量加上负号, 四分量波函数的一组不变, 一组加负号, 则如果是考察电子在外磁场中运动的话, 会发现带相因子 $e^{-i\varphi}$ 的解其相因子要被 $e^{i\varphi}$ 替换。电磁4-矢势变负号可以通过保持标量势

φ 不变而让电荷改变符号, $-e \rightarrow e$, 来实现。“那个拥有电子质量 m , 电荷是 $+e$ 而非 $-e$ 的 (大自然里未出现的) 粒子可称为 ‘正的电子’。如上可知, 正的电子的能级是 $-h\nu$, 与此同时负电子的是 $h\nu$ 。抛开符号不论, 两种粒子的行为相同 [Das (in der Natur nicht vorkommende) Teilchen von der Elektronenmasse m , dessen Ladung nicht

$-e$, sondern $+e$ ist, werde als ‘positives Elektron’ bezeichnet. Man erkennt aus dem Gesagten, daß die Energieniveaus des positiven Elektrons $-h\nu$ sind, wenn $h\nu$ diejenigen des negativen Elektrons sind. Abgesehen vom Vorzeichen verhalten sich beide Sorten von Teilchen Gleich]”。笔者以为, 下面一句更重要, “电子除了有正能级以外还有负能级, 其是正电子的正能级经过改变负号而来的 (Das Elektron wird außer seinen positiven auch negative Energieniveaus besitzen, die aus den positiven Energieniveaus des positiven Elektrons durch Änderung des Vorzeichens entstehen)”。{是不是有些量子力学或量子场论书表述为电子同时具有正和负的能级了, 还说是来自对 $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ 的开根号? 笔者以为, 外尔的这个工作应理解为 P (arity), T (ime) 对称性带出了 C (harge) 对称性。}

2.2 电子与引力

外尔是相对论大家, 对时空结构的数学研究卓有成就。狄拉克1928年推出了相对论量子力学方程, 这自然会引起外尔的注意。1929年, 外尔发表了两篇英文的 *Gravitation and the electron*, 一篇德文的 *Electron und Gravitation*, 内容大同小异。在英文的 *PNAS* 文章中 (交流日期为1929年3月7日), 外尔指出狄拉克方程应用于球对称电磁场在正确的能级以外还得到了一个相同质量带相反电荷的“电子”的能级, 或者说是负的 (能级) ($\dots$ of an “electron” with opposite charge but the same mass)。可见, 用电子与带相反电荷但质量相同的“电子”一起诠释狄拉克方程, 应出现在

这篇文章之前的某篇文章，负能解是个等效的说法，与带相反电荷但质量相同的“电子”这个说法应该二选一。此处外尔依然将这个诠释看作当前理论的缺陷 (defects of the present theory)，为了克服这个缺陷，他还是认定正电荷的那个解指向质子，将狄拉克方程的解分为描述电子的 ψ^+ 和描述质子的 ψ^- ，然后讨论这样的体系之引力与电的问题。这样得到的场方程既不是单个电子的也不是单个质子的理论，也许当作支配氢原子的规律 (as the law governing a hydrogen atom) 更合适。

在 *Zeitschrift für Physik* 上的“电子与引力”这篇德语论文(收稿日期为1929年5月8日，完稿日期为4月19日)中，外尔讨论自旋电子的量子场方程与广义相对论之间的关系。这是对前一篇文章的改进与增补，依然是顺着将正电荷解对应质子的思路，认为必须引入质子的波场 (Zweifello muß das Wellenfeld ψ' des Protons hinzugefügt werden)。这篇文章一般是当作规范场论的奠基性工作的，参阅拙著《云端脚下》。有文献把将狄拉克方程中的质量 m 设为0得到新方程的做法归于外尔1929年的文章，特别是英文的那篇，但这两篇里没有明确的这种说法(见下)。外尔说自己的理论的要旨是，it tells us why the “anti-symmetric” Pauli-Fermi statistics for electrons leads to the “symmetric” Bose-Einstein statistics for photons。说清楚为什么电子的“反对称的”泡利—狄拉克统计会导致光子的“对称的”玻色—爱因斯坦统计，对此量子统计书籍应该多着点儿墨吧？笔者见识少，似乎没读到哪本量子统计的书关注到外尔的这个说法。

3 外尔方程及相关概念

科学家分为两类，一类是著名科学家，一类是非著名科学家，前者凤毛麟角，后者如过江之鲫。著名科学家的一个判据是有没有，有的话又有多少，用其名字命名的科学概念，用英文搜索关键词是“list of things named after ……”。外尔就是这样的著名科学家，用其名字命名的科学概

念是一大长串。这其中，笔者特别关注的是外尔方程以及相关的外尔旋量 (Weyl spinor) 等概念。

在许多关于外尔方程的介绍中，会说外尔方程是令狄拉克方程 $(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc) = 0$ 中的质量 $m = 0$ 得到的，原始文献会指向外尔1929年的“Gravitation and the electron”一文。如果我们知道方程 $(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc) = 0$ 所涉及的深刻数学以及外尔的哲学家、纯粹数学家的身份，这种把狄拉克方程拿来令其中一项之系数为零的事情，笔者不相信外尔干得出来。如果我们粗略地浏览“Gravitation and the electron” (*PNAS*) 和“Elektron und Gravitation” (*Zeitschrift für Physik*) 这两篇文章，我们甚至找不到令 $m = 0$ 的痕迹。

有嫌疑的可能是这么一段(图4): Sehen wir vom Gravitationsglied ab, so enthalten die Feldgleichungen keine dimensionierte Atomkonstante. Für eine Wirkungsgröße wie das Glied in der Diracschen Theorie, das die Masse als Faktor trägt, ist in der Zweikomponententheorie kein Platz. Aber man weiß, wie auf Grund der Erhaltungssätze die Masse eingeführt werden kann. Man nehme an, daß in der “leeren Umwelt” des Teilchens…… 这段的大意是: “忽略引力项, 场方程就不包含有量纲的原子常数。对于如狄拉克理论中质量作为系数的那一项那样的作用量, 在两分量理论中是无立足之地的。但是, 我们知道如何基于守恒定律引入质量。假设在粒子的‘空的环境’中……”。外尔这篇文章研究的是电子与引力, 或者说电子的标

Sehen wir vom Gravitationsglied ab, so enthalten die Feldgleichungen keine dimensionierte Atomkonstante. Für eine Wirkungsgröße wie das Glied in der Diracschen Theorie, das die Masse als Faktor trägt*, ist in der Zweikomponententheorie **kein Platz**. Aber man weiß, wie auf Grund der Erhaltungssätze die Masse eingeführt werden kann. Man nehme an, daß in der „leeren Umwelt“ des Teilchens, außerhalb eines gewissen Weltkanals, dessen Querschnitte $x_0 = \text{const}$ von endlicher Ausdehnung sind, die $t_p^{\mu\nu}$ verschwinden und die $e^\nu(\alpha)$ die konstanten Werte der speziellen Relativität annehmen. Dann sind

$$J_p = \int \left(t_p^0 + \frac{1}{c} v_p^0 \right) d\xi$$

die Komponenten eines von der Willkür des Koordinatensystems und der lokalen Achsenkreuze nicht beeinflussten, zeitlich konstanten Vierervektors in der Umwelt. Das normale Koordinatensystem daselbst kann genauer

图4 外尔1929年 Elektron und Gravitation 一文 P.351 上的截图

Sodann sehen wir, daß die mit γ^5 nicht kommutierbare, die Paare (ψ_1, ψ_2) und (ψ_2, ψ_1) vertauschende Matrix β in einer nur aus zwei Komponenten q gebildeten kovarianten Wellengleichung nicht vorkommen darf. Das die Ruhmasse enthaltende Glied der Wellengleichung müßte also bei einer zweikomponentigen Gleichung fehlen. Streichung dieses Gliedes bedeutet physikalisch den Übergang zu Teilchen mit der Ruhmasse 0, die stets mit Lichtgeschwindigkeit c laufen und deren Energie E und Impuls p in der Beziehung

$$\frac{E^2}{c^2} = \sum_k p_k^2 \quad (44)$$

zueinander stehen, wie dies bei Lichtquanten der Fall ist. Die zweikomponentige Wellengleichung lautet sodann

$$\frac{1}{c} \frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \sigma_k \frac{\partial q}{\partial x_k} = 0. \quad (45)$$

Sie ist relativistisch invariant und hat für den durch (43) definierten Vektor s_k die Kontinuitätsgleichung

$$\sum_{r=1}^4 \frac{\partial s_r}{\partial x_r} = 0$$

zur Folge. Indessen sind diese Wellengleichungen, wie ja aus ihrer Herleitung hervorgeht, nicht invariant gegenüber Spiegelungen (Vertauschung von links und rechts) und infolgedessen sind sie auf die physikalische Wirklichkeit nicht anwendbar. Das Fehlen der Invarianz der Wellengleichung gegenüber Spiegelungen äußert sich in einer eigentümlichen Koppelung zwischen

图5 泡利1933年论文P.226页上的截图

zueinander stehen, wie dies bei Lichtquanten der Fall ist. Die zweikomponentige Wellengleichung lautet sodann

$$\frac{1}{c} \frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \sigma_k \frac{\partial q}{\partial x_k} = 0. \quad (19.29)$$

Sie ist relativistisch invariant und hat für den durch (19.27) definierten Vektor s_k die Kontinuitätsgleichung

$$\sum_{r=1}^4 \frac{\partial s_r}{\partial x_r} = 0$$

zur Folge. Diese Wellengleichungen sind, wie ja aus ihrer Herleitung hervorgeht, nicht invariant gegenüber Spiegelungen (Vertauschung von links und rechts)¹. Das Fehlen der Invarianz der Wellengleichung gegenüber Spiegelungen äußert sich in einer eigentümlichen Koppelung zwischen der Richtung des Spin-Drehimpulses und des Stromes, doch soll hierauf nicht näher eingegangen werden. Erwähnt sei noch, daß auch die Gln. (19.29) sowohl zu Zuständen positiver als auch zu Zuständen negativer Energie gehörige Eigenlösungen besitzen. Zu gegebenen Werten von Energie und Impuls, die (19.28) erfüllen, gibt es hier aber nur eine Eigenlösung.

54 S. 150 In der ersten Auflage lautet dieser Satz so: „Indessen sind diese Wellengleichungen, wie ja aus ihrer Herleitung hervorgeht, nicht invariant gegenüber Spiegelungen (Vertauschung von links und rechts) und infolgedessen sind sie auf die physikalische Wirklichkeit nicht anwendbar.“

Zur Frage der Spiegelungsinvarianz ist hier folgendes anzumerken. Die freie WEYLsche Gleichung ist durchaus spiegelinvariant. Tatsächlich bleibt (19.29) invariant, wenn das transformierte Feld gleich eq^* , $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, gesetzt wird. Nicht-invariant können nur Wechselwirkungen sein.

图6 泡利论文的1990年重新整理版中对应图5的部分以及新加的注解54

签 e 与标签 m 之间的关系。狄拉克波方程中的波函数是四分量的, 当时的想法是描述电子只需两分量波函数即可 (泡利方程就是两分量波函数理论), 外尔是把四分量波函数两两分派给电子和质子的。但是, 在为两分量理论构造的作用量中, 狄拉克理论的带质量项没有立足之地, 故外尔有“空的环境” (leere Umwelt) 之说。

外尔的这篇论文是规范场论的原始文献之一, 它是如何带出外尔方程的, 目前看来还是个谜。泡利1933年的经典综述文章“波力学的一般原理”一文中出现了二分量波方程 (zweikomponentige Wellengleichung),

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \sigma_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0,$$

并指出其不满足宇称守恒 (图5)。后来的文献指出泡利批评外尔方程不满足宇称守恒, 但是泡利的文章里并没有外尔方程的说法。在 Norbert

Straumann 加注后于1990年再版的泡利这篇文章中, 提到该方程不满足左右交换对称性时把泡利原文里的“...und infolgedessen sind sie auf die physikalische Wirklichkeit nicht anwendbar (……因此其对物理现实没用)”这半句给删掉了 (图6)。在新加的注解54中, 这个方程被称为 freie Weylsche Gleichung (自由外尔方程)。可以断定, 此时已确切有外尔方程的说法。

有文献提到 Conyers Herring, Accidental Degeneracy in the Energy Bands of Crystals, *Phys. Rev.* 52, 365 (1937) 一文首次提出了 Weyl quasiparticle, Weyl semimetal 的概念, 但文章里并没出现 Weyl 字样, 故也不能认为1937年有外尔方程的说法。外尔方程的说法到底始于何时, 笔者目前还没有线索。不过有一点是可以肯定的, 咱们不能冤枉外尔, 说人家令狄拉克方程中一项的系数 $m = 0$ 得到了外尔方程。物理学不能这么干。

4 多余的话

数学家、物理学家、木匠和厨子等等, 若是能把活儿干好了, 在西语中都叫 philosopher (爱智慧者)。Philosophy 真不是汉语的“哲学”, 但为了避免麻烦, 此处还是用哲学指代 philosophy。外尔是那种自少时就浸淫哲学的科学家。外尔先是醉心于康德的教义 (康德是正经的数学物理教授), 后来又研习费希特的形而上唯心主义 (metaphysical idealism) 与胡塞尔的现象学 (phenomenology), 在那里找到了新的哲学启蒙源泉, 这让他认为哲学是应该严肃追随的学问 (to regard philosophy as a pursuit to be taken seriously)。外尔研究数学和相对论, 是伴随着深刻的哲学思考的, 所以他写得出 *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (数学哲学与自然科学) 这样的大部头。就是读这本书时笔者倍感挫折, 觉得自己是不可能学会加减乘除的了。笔者不敢认为一个好的数学家、物理学家一定要有

哲学功底，但总相信多一点哲学思考对于当好数学家、物理学家是有益的。

外尔的第一身份是数学家，还是希尔伯特、庞加莱那样的懂物理的一流数学家。没有这个层次的数学基础，很难想象会促成时空理论与电磁理论的深入结合，后来又因为量子力学的掺和而有了规范场论。爱因斯坦对时空理论与电磁理论有深入的思考，但他受数学能力的局限就无法大踏步地推进。他为了构造广义相对论的后期要跟着列维-齐维塔(Tullio Levi-Civita, 1873—1941)现学张量分析，这显然不如希尔伯特、外尔们从容。

顺带说一句，量子力学教科书中用薛定谔方程解氢原子问题，那也得有外尔这样的数学水

平(见薛定谔1926年论文脚注)。更详细的解氢原子波力学的详细步骤，见于索末菲1929年的“原子构造与谱线之波力学补充卷(*Atombau und Spektrallinien: Wellenmechanischer Ergänzungsband*)”一书。构造量子力学，终究还是哥廷恩的学者扛下了所有。

参考文献

- [1] Wells J R(ed.). The Mathematical Heritage of Hermann Weyl. American Mathematical Society, 1988
- [2] Chandrasekharan K(ed.). Gesammelte Abhandlungen. Springer, 1968
- [3] Chandrasekharan K(ed.). Hermann Weyl 1885-1985: Centenary Lectures. Springer, 1986
- [4] Bonolis L. La rivista del nuovo cimento, 2004, 27: 1
- [5] Wybourne B G. Int. J. of Quantum Chemistry Symp., 1973, 7: 35



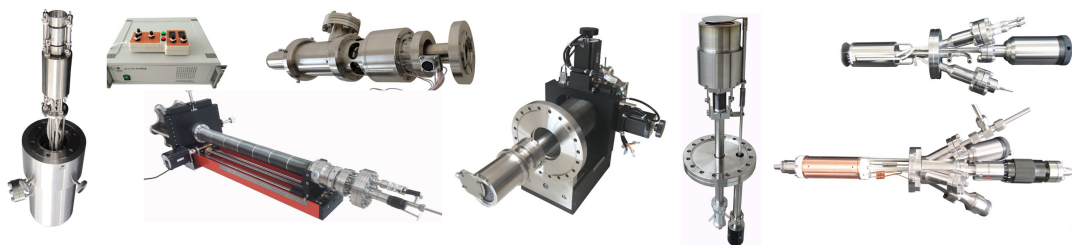
大连齐维科技发展有限公司

地址: 大连高新园区龙头工业园龙天路27号

电话: 0411-8628-6788 传真: 0411-8628-5677

E-mail: info@chi-vac.com HP: <http://www.chi-vac.com>

表面处理和薄膜生长产品: 氩离子枪、RHEED、磁控溅射靶、束源炉、电子轰击蒸发源、样品台。



超高真空腔室和薄膜生长设备: PLD系统、磁控溅射系统、分子束外延系统、热蒸发镀膜装置。

