

维格纳——群论应用于量子力学的开拓者

曹则贤[†]

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

思维锋利如刃, 神情和蔼可亲。¹⁾

2025-02-24 收到

[†] email: zxciao@iphy.ac.cn

DOI: 10.7693/wl20250905

CSTR: 32040.14.wl20250905

摘要 维格纳深刻认识到对称性之于物理学的意义, 对发展群论的量子力学应用做出了突出贡献; 特别地, 他的工作解释了为什么群论应用于量子力学会比应用于经典力学能得到更多的结果。1925年维格纳甫一出道即提出量子能级必有自然宽度, 其硬性假设的关系式 $\tau\Delta\varepsilon = h$ 后来被当作能量—时间不确定性关系。维格纳对物理学的贡献是全面的, 在数学物理、相对论、量子力学、粒子物理和固体物理方面都留下了个人印记。

关键词 对称性, 群论, 分子谱, 能级宽度, 维格纳定理, Wigner—Eckard 定理, Wigner—Seitz 单胞

0 维格纳其人简介

维格纳 (Eugene Paul Wigner, 1902—1995) 1902年出生于匈牙利布达佩斯。在5岁到10岁期间维格纳念私塾, 1912年到德语学校 Lutheran gymnasium 上学。维格纳1920年中学毕业后, 为了日后的挣钱大业, 决定选择读化工专业。1920—1921年间维格纳在布达佩斯大学学了一年化工, 第二年转学到德国的柏林技校 (die Technische Hochschule Berlin), 因为那里的化学比较强。在柏林求学期间, 维格纳对数学和物理的热情不减, 在那里他试图学到更多的理论物理, 幸好不远处就是柏林大学, 当时那里有普朗克、爱因斯坦和劳厄等人。1924年, 维格纳从柏林技校毕业, 本科论文 (Diplomarbeit) 是关于 crystal structure of rhombic sulphur (硫的菱方晶体结构)。晶体是原子对称排列的固体, 维格纳的本科论文工作奠定了他一生工作的基调: 对称性。

维格纳大学毕业后在柏林技校接着跟 Michael Polanyi (1891—1976) 攻读化工博士, 论文题目为 Bildung und Zerfall von Molekülen (分子的形成与分解)。他们在研究原子与激发态分子的平

衡中注意到, 量子能级不是绝对确切的, 而是有一定的宽度。与此相对, 角动量却有确定的值 (the electron's angular momentum had its definite value)。1925年, 维格纳获得工学博士学位, 成了 Dr. Ing. Wigner {Dr. Ing. 是博士工程师的缩写。1923年, Dr. Ing. Rudolf Plank 为我国带来了熵的概念, 他被讹传成了 I. R. 普朗克。参见拙著《物理学咬文嚼字》卷一}。

维格纳博士毕业后回到布达佩斯, 进了皮革厂 (图1)。不过, 他订了份德语物理杂志 *Zeitschrift für Physik*。在这份杂志上, 维格纳读到了玻恩和约当关于矩阵力学的文章。{It was there that he



图1 维格纳(1902—1995)

1) A. J. Coleman 评维格纳: a person with razor-sharp mind and of a kind and gentle spirit.

first read the article by Born and Jordan on matrix mechanics. 这是我读到的极罕见的忠实于史实的关于矩阵力学的描述! } 维格纳因为研究过晶体, 懂矩阵, 他轻松看懂了玻恩—约当的矩阵力学论文以及接下来的玻恩—海森堡—约当那一篇。他当时的知识可以计算(电子的)能级以及描述跃迁。

维格纳的导师 Polanyi 惜才, 把他推荐给了柏林技校的新任理论物理教授 Richard Becker 做助手。在接下来的一段时间里, 他的三篇关于量子力学的论文让他名声鹊起。1927 年底, 维格纳受邀到哥廷恩给希尔伯特当助手, 对于技校毕业的年轻学者来说这得算是一步登天。{一刹那间, 笔者觉得登堂入室有了具象}。不过此时希尔伯特已经病得很厉害了, 和维格纳没有多少学术上的合作。在哥廷恩, 维格纳认识了玻恩、约当与弗兰克等人, 和约当成了亲密的合作者。1928 年, 维格纳回到柏林技校任私俸讲师, 1930 年成了那里的编外教授 (außerordentlicher Professor)。在 1929 年底维格纳就收到了普林斯顿大学的邀请, 柏林技校也为他提供了半时聘任。维格纳 1930 年到普林斯顿大学工作, 1935 年在威斯康星大学谋得全职教授的位, 1937 年加入美国籍。在 1932 年原子核的质子加中子模型被提出来后, 维格纳转向原

子核物理的研究, 并做出了突出贡献。维格纳于 1938 年获聘普林斯顿大学数学物理教授, 此后参与了曼哈顿计划, 二战后继续研究相对论量子力学。

1 维格纳的量子力学著作

维格纳的“群论及其在原子谱量子力学中的应用”(Eugene P. Wigner, *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*, Vieweg (1931). 有英文版 *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*) 一书是最早的那批量子力学著作之一, 其对量子力学的推广与应用具有重要的意义(图 2)。维格纳的散文集 *Symmetries and reflections* (The MIT Press, 1970) 也有一些值得关注的相关内容。

维格纳发表了众多有价值的数学与物理研究论文, 其中与量子力学有关的论文大致罗列如下:

(1) M. Polanyi, Eugene Wigner, Bildung und Zerfall von Molekülen (分子的形成与分解), *Zeitschrift für Physik* 33, 429—434 (1925).

(2) Eugene P. Wigner, Über nicht kombinierende Terme in der neueren Quantentheorie (论新量子论中的非组合项), *Zeitschrift für Physik* 40, 492—500(1926); 40, 883—892(1927).

(3) Eugene P. Wigner, Einige Folgerungen aus der Schrödingerschen Theorie für die Termstrukturen (关于项结构基于薛定谔理论的一些推论), *Zeitschrift für Physik* 43, 624—652 (1927).

(4) Eugene P. Wigner, Über die Erhaltungssätze in der Quantenmechanik (论量子力学中的守恒律), *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 375—381 (1927).

(5) John von Neumann, Eugene P. Wigner, Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons (基于转动电子的量子力学对谱性质的解释), *Zeitschrift für*

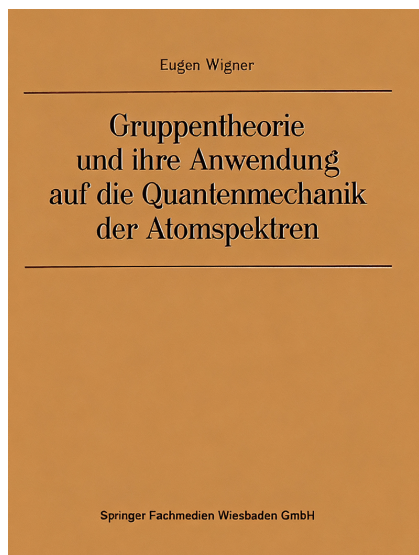


图2 维格纳著 *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*

Physik 47, 203—220 (1928); 49, 73—94(1928); 51, 844—858 (1928).

(6) Pascual Jordan, Eugene P. Wigner, Über das Paulische Äquivalenzverbot (论泡利的等价禁制), *Zeitschrift für Physik* 47, 631—651 (1928).

(7) Eugene P. Wigner, E. E. Witmer, Über die Struktur der zweiatomigen Molekelspektren nach der Quantenmechanik (依据量子力学的双原子分子谱结构), *Zeitschrift für Physik* 51, 859—886 (1928).

(8) John von Neumann, Eugene P. Wigner, Über merkwürdige diskrete Eigenwerte (论值得关注的分立本征值), *Physikalische Zeitschrift* 30, 465—467 (1929).

(9) John von Neumann, Eugene P. Wigner, Über das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen (论非渡越过程本征值的行为), *Physikalische Zeitschrift* 30, 467—470 (1929).

(10) Eugene P. Wigner, Über die elastischen Eigenschwingungen symmetrischer Systeme (对称系统的弹性本征振动), *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 133—146 (1930).

(11) V. Weisskopf, Eugene P. Wigner, Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie (基于狄拉克光理论的自然线宽计算), *Zeitschrift für Physik* 63, 54—73 (1930).

(12) V. Weisskopf, Eugene P. Wigner, Über die natürliche Linienbreite in der Strahlung des harmonischen Oszillators (论谐振子辐射的自然线宽), *Zeitschrift für Physik* 65, 18—29 (1930).

(13) Eugene P. Wigner, Über eine Verschärfung des Summensatzes (对求和规则的明确), *Zeitschrift für Physik* 32, 450—453 (1931).

(14) Eugene P. Wigner, Über die Operation der Zeitumkehr in der Quantenmechanik (论量子力学中的时间反演操作), *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 546—559 (1932).

(15) E. Wigner, F. Seitz, On the Constitution of

Metallic Sodium, *Physical Review* 43, 804—810 (1933).

(16) R. Döpel, K. Gailer, Eugene P. Wigner, Über die experimentelle Prüfung des Spinerhaltungssatzes (自旋守恒定律的实验验证), *Physikalische Zeitschrift* 35, 336—337 (1934).

(17) Pascual Jordan, John von Neumann, Eugene P. Wigner, On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism, *Annals of Mathematics* 35, 29—64 (1934).

(18) J. O. Hirschfelder, Eugene P. Wigner, Separation of Rotational Coordinates from the Schrodinger Equation for N Particles, *PNAS* 21, 113—119 (1935).

(19) Eugene P. Wigner, On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group, *Annals of Mathematics* 40, 149—204 (1939).

(20) Eugene P. Wigner, On Representations of Certain Finite Groups, *American Journal of Mathematics* 63, 57—63 (1941).

(21) Eugene P. Wigner, Relativistische Wellengleichungen (相对论波方程), *Zeitschrift für Physik* 124, 665—684 (1948).

(22) V. Bargmann, Eugene P. Wigner, Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations, *PNAS* 34, 211—223 (1948).

(23) T. D. Newton, Eugene P. Wigner, Localized States for Elementary Systems, *Reviews of Modern Physics* 21, 400—406 (1949).

(24) Eugene P. Wigner, Do the Equations of Motion Determine the Quantum Mechanical Commutation Relations? *Physical Review* 77, 711—712 (1950).

(25) Eugene P. Wigner, On a Class of Analytic Functions from the Quantum Theory of Collisions, *Annals of Mathematics* 53, 36—67 (1951).

(26) Eugene P. Wigner, Derivative Matrix and Scattering Matrix, *Revista Mexicana de Fisica* 1, 91—101 (1952).

(27) E. Inönü, Eugene P. Wigner, Representations of the Galilei Group, *Il Nuovo Cimento* 9, 705—718 (1952).

(28) Eugene P. Wigner, Application of the Rayleigh-Schrodinger Perturbation Theory to the Hydrogen Atom, *The Physical Review* 94, 77—78 (1954).

(29) Eugene P. Wigner, Conservation Laws in Classical and Quantum Physics, *Progress of Theoretical Physics* 11, 437—440 (1954).

(30) Eugene P. Wigner, John von Neumann, Significance of Loewner's Theorem in the Quantum Theory of Collisions, *Annals of Mathematics* 59, 418—433 (1954).

(31) Eugene P. Wigner, Relativistic Invariance in Quantum Mechanics, *Il Nuovo Cimento* (X) 5, 517—532 (1956).

(32) Eugene P. Wigner, Relativistic Invariance of Quantum-Mechanical Equations, *Helvetica Physica Acta*, Suppl. 4, 210—226 (1956).

与外尔、冯·诺伊曼的数学物理成就相比，维格纳的研究更偏物理一些，特别是后期的一些工作，然而终不脱用数学这种小无相功催动相对论、量子力学招式的窠臼。

2 维格纳对量子力学的贡献

2.1 分子的形成与分解

维格纳 1925 年的博士论文同年由导师 Michael Polanyi 与维格纳联名发表在 *Zeitschrift für Physik* 杂志上，这让我们有幸一睹这篇历史性文献的面目。

碰撞单元之间的相对能量恰好是待形成的分子的量子许可能量值，这是无限不可能的 (undlich unwahrscheinlich ist)。若一个原子或分子吸附在固体上，其允许具有的能量值是一个连续的流形 (eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit von Energiewerten)，就没这个问题了 [见 Max Born,

James Franck, Bemerkungen über die Dissipation der Reaktionswärme (关于反应热耗散的说明), *Annalen der Physik* 76, 225—230(1925)]。维格纳的这篇文章则是就着分子形成之结合过程加上接下来的自发衰减过程自身讨论问题。为此引入的观点是，量子态有有限的宽度 (die Quantenstände eine endliche Breite haben)，因此具有量子化能量的碰撞单元也会有有限的概率碰到一起形成分子。所谓自发衰减过程 {如今会用弛豫过程这个概念} 是受不久前发现的俄歇 (Pierre Auger, 1899—1993) 过程的启发。一个被 X 射线撕去一个，比如 K 层的，电子的原子，会从比如 L 层发射出一个电子，而为此所需的能量是另一个电子自 L 层向 K 层跃迁所获得的能量提供的 {万幸笔者玩过多年的俄歇谱}。

为了凑出原子结合形成分子的热平衡图像，用前述的被撕去一个 K 层电子的原子 (一价离子) 作为研究对象，研究的是电子和二价离子同一价离子之间的热平衡问题。二价离子同电子相遇时，假设相对动能 (die Energie der Relativbewegung) 落在 (二价离子的) 量子允许能量的 $\Delta\varepsilon$ 大小的范围内，则会发生结合。 τ 是表征一价离子分解成二价离子与电子的特征时间，表征分解的速率。计算时取 $\tau\Delta\varepsilon = h$ 以便和线宽理论吻合 (für $\tau\Delta\varepsilon$ setzen wir nun in Übereinstimmung mit der Theorie der Linienbreite h)。{此处关于线宽理论维格纳引用的是 Niels Bohr, Über die Anwendung der Quantentheorie auf den Atombau (论量子论在原子构造上的应用), *Zeitschrift für Physik* 13, 117—165 (1923)一文。}

与此类比建立起分子形成过程的图像。必须强调一下，结合过程中的角动量 (守恒) 律要求要取消。量子理论允许所产生的单元可拥有的角动量只能是 $h/2\pi$ 的整数倍 (Es muß hervorgehoben werden, daß hierdurch der Drehimpulssatz bei Rekombinationen aufgehoben wird. Die Quantentheorie erlaubt für den Drehimpuls des entstandenen Gebildes nur ganzzahlige Vielfache von $h/2\pi$)。关于分子形成的假设如下：当原子间具有的相对能量在 $\varepsilon - Q$ 与 $\varepsilon + \Delta\varepsilon - Q$ 之间，角动量在 $(n-1)\frac{h}{2\pi}$

与 $n\frac{h}{2\pi}$ 之间，它们的复合就形成内能为 ε ，角动量为 $n\frac{h}{2\pi}$ 的分子 $\{Q$ 是分子的分解热，现在一般称为结合能 $\}$ 。此处 $\Delta\varepsilon$ 与 τ 通过方程 $\Delta\varepsilon\tau = h$ 相联系 (Dabei hängt $\Delta\varepsilon$ durch die Gleichung $\Delta\varepsilon\tau = h$ mit τ zusammen)，见图 3。

关于维格纳的这篇论文，容笔者斗胆评论几句。这篇文章的意义在于注意到，若原子、分子所具有的是作为算符本征值那样的分立能量与分立角动量(0测度的存在)，如果还要求过程满足能量守恒与动量守恒，那么原子结合成分子这种事情就不会发生(0概率事件)。0测度的存在对应0概率的事件，没毛病。显然，世界不是这样的。为了调和这个矛盾，可以假设反应前的能量在目标能量的一定偏差范围内反应即可以一定的概率发生，然后生成物中有一个能量调节的过程，反正要使得能量守恒是满足的。这是个很聪明的、也符合实际的模型。打个不太恰当的比方。设想你带了98块钱试图购买一件标价100元的商品，严格的计划经济下这笔交易成功的概率为0。但是，灵活的私营经济就能允许它以一定的概率发生，比如卖家通过适当降价的方式让交易发生，且卖家通过后续的调账(弛豫过程)让账面上是严格地能平账的(满足守恒律)。

这个工作的一个引人注意的地方是关系式 $\Delta\varepsilon\tau = h$ ，它后来被诠释为海森堡的不确定性原理之能量—时间不确定性关系的前驱。然而，我们注意到，这里 $\Delta\varepsilon$ 是反应前的相对动能与目标能级之差，而不是有一个真实的能量宽度； τ 是表征分子分解为原子之速率的特征时间。用概率谈论分解速率，就不得不引入寿命的概念。关系式 $\Delta\varepsilon\tau = h$ (注意是等式!) 是维格纳硬写出来以便同玻尔的线宽理论相一致的。当然，等到海森堡1927年的被当作提出不确定性原理的论文出来以后，人们不顾物理理论自治性与物理事实提出了很多稀奇古怪的能量—时间不确定性关系(参见拙著《物理学咬文嚼字》卷二)，其中和本文扯上关系的是所谓 $\Delta\varepsilon\tau > h$ 关系中 $\Delta\varepsilon$ 被理解为能级宽度(谱线宽度)而 τ 是激发态寿命。这个解释的一个明显缺陷是，

Dieselbe Formel gewinnt man gemäß Punkt 2 auch, wenn man annimmt, daß die Rekombination zu einem Molekül mit der inneren Energie ε und dem Drehimpuls $\frac{n\hbar}{2\pi}$ erfolgt, sobald die Atome die Relativenergie zwischen $\varepsilon - Q$ und $\varepsilon + \Delta\varepsilon - Q$ und den Drehimpuls zwischen $(n-1)\frac{\hbar}{2\pi}$ und $\frac{n\hbar}{2\pi}$ besitzen. Dabei hängt $\Delta\varepsilon$ durch die Gleichung $\Delta\varepsilon\tau = h$ mit τ zusammen.

图3 Polanyi—Wigner 1925年论文 p.432 上的截图，有关系式 $\Delta\varepsilon\tau = h$

谱线是涉及两个能级的故事，而 τ 作为寿命是单个能级的特征量。其实，所谓的能级寿命就是为了凑合关系 $\Delta\varepsilon\tau \sim h$ 而来的说辞，没有独立的确认能级寿命的程式。这是个永远没有可能验证的鸡—蛋关系。再者，能级宽度——在维格纳这里还只是允许分子形成的前驱物之相对能量的范围——同谱线宽度之间的直接等价只是对普朗克关系 $\varepsilon = h\nu$ 的滥用。电子跃迁产生的光谱线同两个能级有关，即便固定终态能级，同一个线系的谱线宽度也没表现出关系式 $\Delta\varepsilon\tau \sim h$ 所规定的单调关系。其实，只要能量算符解不出带宽度的能量本征值，所谓的能量—时间不确定性关系就没有任何存在依据。

2.2 群论在量子力学中的应用

维格纳1925年回到柏林技校当研究助手，期间和一位名叫 G. Wessenberg 的私俸讲师一起工作。据说如下的一段对话让维格纳回到了对称性研究。

Wessenberg: “... it’s a miracle that in a crystal the atoms are often arranged along the axis or plane of symmetry, why?”

Wigner: “I noticed that if you have an axis of symmetry, the potential is an extremum (a maximum or minimum), but the probability of its being a maximum is much larger, and a similar consideration applied to the plane of symmetry.”

Wessenberg: “Perhaps you are right, but it is important to give a more elegant demonstration!”

维格纳认识到了，就量子力学之于原子系统(单原子、分子、大块物质)的应用而言，关键

的突破口是对称性。当维格纳认识到对称性对新力学的意义时，他手边还就有帮得上忙的参考书，即数学家韦伯(Heinrich Martin Weber, 1842—1913)的 *Lehrbuch der Algebra* (代数课本)，这个三卷本中的第二卷里有群论。

维格纳开始研究电子置换下原子波函数的对称性(symmetry of atomic eigenfunctions under permutation of electrons)。海森堡研究了两个电子的情形，维格纳迅速给推广到三电子以至更多电子的情形，当然都没考虑自旋。接下来维格纳和冯·诺伊曼合作了三篇，用泡利理论处理了电子的自旋。到这时，维格纳已经成了用群论研究量子力学的先驱者，在柏林大学的劳厄教授的催促下，维格纳写出了 *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf der Theorie der Atomspektren* 这本经典，1931年出版。

维格纳对量子力学(应用)的贡献是典型的数学物理。他的《群论及其在原子谱量子力学上的应用》，如人们所评价，是同类三本经典中(另外两本是外尔和范德沃顿的)最接近应用情景的、对量子力学的应用推广最有用的。这本书洋洋洒洒24章，从各章标题我们正好可以一窥理解量子力学应用于原子谱到底涉及哪些内容：

- I. Vektor und Matrizen (矢量与矩阵)
- II. Verallgemeinerung (上一章内容的推广)
- III. Hauptachsen transformation (主轴变换)
- IV. Grundlagen der Quantenmechanik (量子力学基础)
- V. Störungstheorie (摄动理论)
- VI. Transformationstheorie und Grundlinien der Statistischen Deutung der Quantenmechanik (变换理论与量子力学统计诠释的基本原理)
- VII. Abstrakte Gruppentheorie (抽象群)
- VIII. Normalteiler (正规子群)
- IX. Allgemeine Darstellungstheorie (表示理论通论)
- X. Kontinuierliche Gruppen (连续群)
- XI. Darstellungen und Eigenfunktionen (表示与本征函数)

XII. Algebra der Darstellungstheorie (表示论的代数)

XIII. Die symmetrische Gruppe (对称群)

XIV. Die Drehgruppen (转动群)

XV. Die Darstellungen der dreidimensionalen reinen Drehgruppe (三维纯转动群的表示)

XVI. Die Darstellungen des direkten Produktes (分立积的表示)

XVII. Die Grundzüge der Atomspektren (原子谱的特征)

XVIII. Auswahlregeln und die Aufspaltung der Spektrallinien (选择定则与谱线劈裂)

XIX. Teilweise Bestimmung der Eigenfunktionen aus ihren Transformationseigenschaften (用变换性质部分确立本征函数)

XX. Das Drehelektron (转动原子)

XXI. Die Gesamtquantenzahl (总量子数)

XXII. Die Feinstruktur der Spektrallinien (谱线的精细结构)

XXIII. Auswahl- und Intensitätsregeln bei Mitberücksichtigung des Spins (纳入自旋考量的选择定则与强度规则)

XXIV. Das Aufbauprinzip (构造原理)

维格纳的这本书提供了对量子力学中的对称性观念的基本分析，他将那些思考的中间过程尽可能地掰开揉碎了讲清楚，努力想让数学功底不深的读者“感到轻松自在(sich zu Hause fühlen)”。他让人们看到群论应用于量子力学会比应用于经典力学能得到更多的结果。对于我们这些智力与基础双亏的原子物理与量子力学修习者，这真是一本难得的入门参考书。当然，这本书对数学功底挑战也不容小觑，至少关于维格纳定理及其证明这些群论知识就不是笔者这样的学习者容易弄懂的。

解量子力学的微分方程一般都会遭遇极大的困难，直接计算只能得到粗略的近似，万幸的是，很大一部分的量子力学结果仅凭对称性考虑就能得到 (ein so großer Teil der quantenmechanischen Resultate schon durch reine Symmetrieüberleg-

ungen erhalten werden kann)。对用群论处理薛定谔方程的做法，有人认为它是非物理的。维格纳说，“我倒是觉得，有意识地运用基本的对称性质要比计算更加对应物理感觉 (Es scheint mir aber, daß die bewußte Ausnutzung elementarer Symmetrieeigenschaften dem physikalischen Gefühl eher entsprechen muß, als die mehr rechnerische Behandlung)”。“她(群论)由大量的相当不明显的结论组成，尽管单个看来是平凡的，但其作为一个整体就不可无视了(Sie besteht nämlich aus einer großen Zahl unscheinbarer Schlüsse, die zwar einzeln betrachtet trivial, in ihrer Gesamtheit aber doch nicht so leicht zu überblicken sind)”。对数学之美以及物理感觉这种抽象品质的强调，是维格纳的科学研究的特色。

2.3 Wigner—Eckart定理

维格纳的另外一个成就是留下了Wigner—Eckart定理，这是群表示论的一个结果，从数学的角度看未必有多了不得，但是对于量子力学的应用还是蛮重要的。Wigner—Eckart定理断言，不可约张量算符关于角动量本征态的矩阵元可以写成Clebsch—Gordan系数同一个不依赖于角动量投影(即 m 值)的项之积，即

$$\begin{aligned} & \langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle \\ &= \langle \alpha', j' | T^{(k)} | \alpha, j \rangle \langle j, k; m, q | j', m' \rangle. \end{aligned}$$

这个工作，一般文献会回溯到“Carl Eckart, Some Studies Concerning Rotating Axes and Polyatomic Molecules, *Physical Review* 47, 552—558 (1935)”一文，该文结尾提及维格纳阅读过稿件。然而，该文似乎并不是显著地与这个定理有关，当然可能是笔者理解不到位。“Eugene P. Wigner, On the Matrices Which Reduce the Kronecker Products of Representations of S. R. Groups”一文对转动群(角动量问题)有详细的介绍，此文成于1940年但未发表，后收录入“L. C. Biedenharn, H. van Dam (eds.), *Quantum Theory of Angular Momentum*, Academic Press

(1965)”一书。

2.4 维格纳—塞茨单胞

我第一次知道维格纳这个名字是在1985年，从固体物理课上学到的，见于维格纳—塞茨单胞{其实我觉得不应加这个“单”字}，当然我那时没管这个维格纳是谁。单胞，unit cell，是晶体的构成单元，通过复制—平移充满整个空间。一个只包含一个格点的特殊单胞称为元胞(primitive cell)。一块晶体可以有无穷多种不同的元胞。维格纳—塞茨胞是这样的元胞，是通过弗罗诺伊(Георгий Феодосьевич Вороной, 1868—1908)分割方法(Voronoi decomposition)构造的，即从一个格点出发，向附近的格点连线，作连线的垂直平分线，垂直平分线所围成的最小闭合空间就是维格纳—塞茨胞，胞内任意一点到此格点的距离比到其他格点都近。维格纳—塞茨胞就是最小结界，看看烤面包(如果面包剂子是周期排列的，如果烤好的面包充满整个烤盘的话)您就知道什么是维格纳—塞茨胞啦。若格点是一个原子实，则维格纳—塞茨胞就是围绕原子实最近的、供电子占据的可重复空间。

维格纳—塞茨胞是维格纳和塞茨在1933年的论文中为解钠晶体中电子的薛定谔方程而引入的。对于钠晶体(面心立方晶体)，维格纳—塞茨胞是

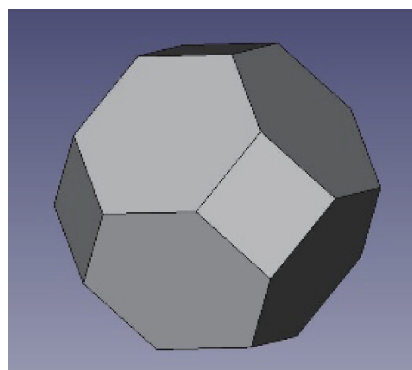


图4 截角八面体。它既是面心立方结构的Wigner—Seitz单胞，也是Brillouin区，还是能充满三维空间但面积几乎是最小的几何体



图5 晚年的狄拉克与维格纳

截角八面体(truncated octahedron), 见图4。维格纳一塞茨用球对截角八面体作近似, 在表面上引入边界条件 $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$ 。有物理文献说, 这是周期性边界条件, 笔者以为不确。这是由弗罗诺伊分割的规则决定的, 即便旁边的格点有偏移, 即周期性破缺了, 这个边界条件也成立。我们的固体物理书说不清楚这里的问题, 真让人无语。

维格纳他们当年全凭一张纸、一支笔手算固体的能带结构, 真令人佩服。一门学问, 如果不是亲手感知, 是难以有深刻体会的。

3 多余的话

维格纳为钱财谋, 青年时期修习化工专业于柏林技校至获得博士学位(1925), 其间坚持自学数学、物理热情不减, 略有小成, 1927年竟至于被数学大神希尔伯特眷顾, 招至哥廷恩当研究助手。维格纳自1925年开始发表数学、物理研究论文, 抛开在纯数学、相对论方面的成就不论, 其关于量子力学的著述竟位列量子力学自开创以来之第6(见本系列之福克篇), 可见其在柏林技校(不是柏林大学!)还是学到了不少真数学与真物理的。与此相对, 在世界太多的地方, 即便名校宗师讲坛也是连个野狐禅都听不到, 殊为可叹。饶你高耸入云, 绵延千里, 无神仙不算名山。聪颖少年们欲成栋梁之材, 一要始终保持极高的求知热忱, 二要早成饱学之士, 三要早得名

师点化研习真经, 四要早历研究劫难。非如此, 不足以登堂入室。

追述维格纳的成才经历, 不得不说, 他这样的大才一般的弯路都改变不了他成为数理巨擘的宿命。这可能与他们在中学就打下坚实的基础有关。他上的布达佩斯德语学校短时期内聚集了维格纳、冯·诺伊曼、西拉德和泰勒四位火星人。有文献称赞到, “His teachers were excellent there, eager to impart knowledge”。老师优秀, 而且还急切地想把知识给传递出去, 那学生该是多么幸运。那么他们那里的中学老师优秀的标准是什么呢? 维格纳的数学老师创立中学数学杂志, 还写书(He founded the Mathematics Journal for Secondary Schools and wrote books which elucidated the simplest solutions of the problems posed there); 物理老师做漂亮演示实验还总是成功(showed nice experiments and the experiments were always successful), 跟他读了两年中学物理后, 维格纳觉得柏林技校和柏林大学前两年的物理课都不过是复习。

维格纳和狄拉克同年, 都是1902年出生的。到了1934年, 狄拉克早已是出门带光环的量子力学奠基人, 还依然是个光棍。这一年, 维格纳介绍自己离婚的妹妹同狄拉克相识, 1937年那两人结婚, 而维格纳自己也是到了1936年才结婚。这两位是立业成大家而后结婚成小家的典范, 都被圈内人称为 strange man。狄拉克与维格纳维持了一生的妹夫郎舅加好友的关系(图5), 但似乎没见共同署名的文章, 也算是物理学史上的一段佳话。

参考文献

- [1] Wightman A S(ed.). The Collected Works of Eugene Paul Wigner. Springer, Vol. I, 1993; Vol. II, 1996; Vol. III, 1997; Vol. IV, 1997; Vol. V, 1992
- [2] Mehra J(ed.). The Collected Works of Eugene Paul Wigner. Springer, Vol. VI, 1995; Vol. VII, 2001; Vol. VIII, 1998
- [3] van der Waerden B L. Sources of Quantum Mechanics. Dover Publications, 1968
- [4] van der Waerden B L. Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik (量子力学中的群论方法). Springer, 1932