物 理 学 报 *Acta Phys. Sin.* Vol. 73, No. 19 (2024) 194301

压电圆环径向弯曲振动与激励研究*

潘瑞[1)2)] 莫喜平[1)†] 柴勇[1)‡] 张秀侦[1)2)] 田芝凤[1)]

1) (中国科学院声学研究所, 海洋声学技术实验室, 北京 100190)

2) (中国科学院大学物理科学学院, 北京 100049)

(2024 年 6 月 27 日收到; 2024 年 8 月 3 日收到修改稿)

针对压电圆环换能器的径向弯曲振动问题, 从薄壳理论出发进行相关数理推导, 讨论了压电效应的影响及电学短路与开路下的弯曲振动方程. 进行相关解析求解, 给出了两种条件下的多阶谐振频率预测公式, 并利用有限元法分析了两式的适用范围. 使用模态理论, 定义模态权值函数, 研究了电学激励条件对多阶弯曲振动模态的具体影响, 得到了单模态激励、局部等幅激励和单端激励等作用于多个目标模态的有效方法. 经有限元仿真 (FEM)、实验与理论对比验证, 三者吻合较好, 相关结论可以为压电圆环弯曲振动模态识别、模态激励的精细化调控提供理论基础.

关键词: 压电圆环换能器, 弯曲振动, 薄壳理论, 模态激励

PACS: 43.38.+n, 43.30.+m, 43.40.+s **DOI:** 10.7498/aps.73.20240887

CSTR: 32037.14.aps.73.20240887

1 引 言

圆环换能器又称为圆管换能器, 使用压电陶瓷环实现机电转换, 是最为常见的水声换能器之一[1]. 传统的压电圆环换能器通常利用径向振动模态 (又称呼吸模态) 进行工作, 例如空气背衬的压电薄圆环水听器[2–4], 或大功率溢流圆环发射换能器[5,6]等. 研究者们对呼吸模态的研究已较为成熟, 相关理论可以较好地阐述其振动特性[7–13].

随着声学换能器的发展与需要, 除了呼吸模态, 国内外学者对压电圆环的弯曲振动也进行了相关研究. Huang 等[14] 研究了轴向极化圆环的 r-θ 方向面外弯曲振动 (振型如图 1(a) 所示), 利用板壳假设推导了非轴对称的横振动频率方程及多阶解析解. Aronov[15] 使用能量法推导了压电圆环的 r-θ 方向面内弯曲振动 (振型如图 1(b) 所示), 该振动模态的谐振频率相比呼吸模态大幅下降, 可使圆环用于超低频发射.

然而, 对于压电圆环径向弯曲振动即 r-z 面内振动, 由于该模态的振动反相区较大、辐射能力差等原因往往未引起人们重视, 相关研究较少 (振型如图 1(c) 所示), 相关理论缺失. 但一方面, 对于普通压电圆环水声换能器的设计, 需要使弯曲模态的谐振频率远离工作区间, 以避免响应曲线出现凹谷. 确认弯曲模态谐振频率对压电圆环换能器的响应分析及具体设计均有直接帮助. 另一方面, 由于压电圆环的大功率特性, 人们往往考虑引入其他结构与圆环换能器耦合, 例如圆环弯张换能器[16], 此时径向弯曲模态将不可避免. 因此, 对径向弯曲模态特性及激励原理进行相关研究具有重要意义.

* 国家自然科学基金 (批准号: 62127801) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: moxp@mail.ioa.ac.cn

‡ 通信作者. E-mail: chaiyong@mail.ioa.ac.cn

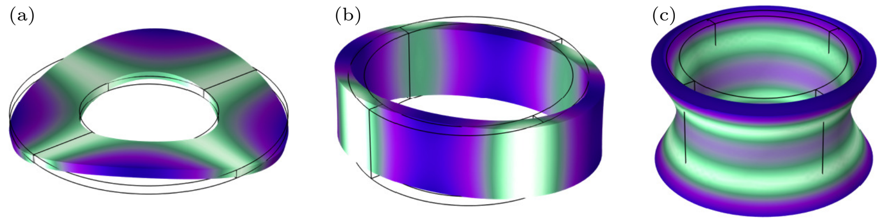

图 1 圆环的几种弯曲振动模态 (a) r-θ 面外横振动; (b) r-θ 面内弯曲; (c) r-z 面内振动

Fig. 1. Several bending vibration modes of a circular ring: (a) Out-of-plane r-θ transverse vibration; (b) in-plane r-θ bending; (c) in-plane r-z vibration.

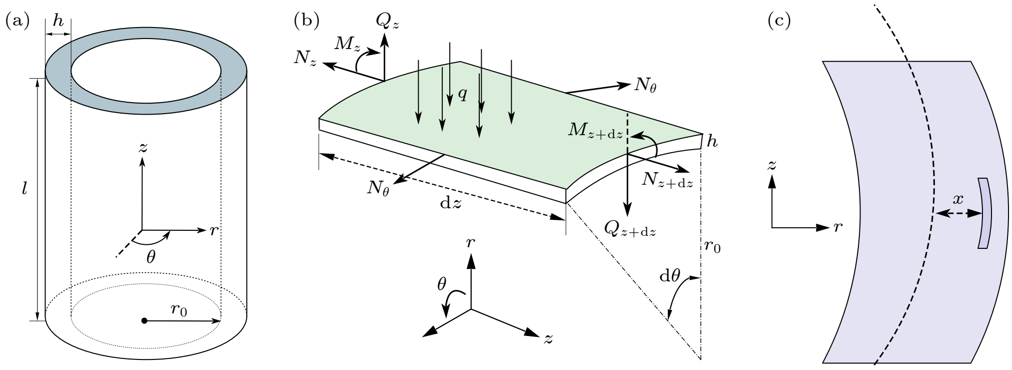

图 2 薄壳模型 (a) 圆柱壳体; (b) 微元受力; (c) 弯曲示意

Fig. 2. Thin shell model: (a) Cylindrical shell; (b) microelement forces; (c) bending schematic.

2 压电圆环基于薄壳理论的弯曲振动方程

2.1 基本假设与平衡方程

对于压电圆环, 如果壁厚 h 远小于曲率半径 r_0 , 在力学上可视为薄壳. 在呼吸模态[17] 的计算中, 通常认为径向正应力 T_{rr} 和切应力 T_{rz} 是一个相对小量, 即所谓的薄膜理论. 本文所讨论压电圆环的弯曲振动, 属于薄壳的小挠度振动, 径向正应力 T_{rr} 同样可以忽略, 但切应力 T_{rz} 应该被保留. 结合轴对称性质, 作出假设如下: 1) 环上各点径向位移为挠度 w , 且忽略径向正应力, 即 $\eta_r(r,z,t)=w(z,t)$, $T_{rr}=0$; 2) $\boldsymbol{\theta}$ 方向切应力与切应变为 0, 即 $S_{\theta r}=S_{\theta z}=0$, $T_{\theta r}=T_{\theta z}=0$.

Timošenko[18] 在其《板壳理论》一书中给出了图 2(a) 圆柱壳体的静力平衡方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N_z}{\mathrm{d}z}r_0\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta=0,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}Q_z}{\mathrm{d}z}r_0\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta+N_\theta\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta=-qr_0\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\ ,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}z}r_0\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta=Q_zr_0\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta.\end{cases}\tag{1}$$

式中 N, Q, M 分别表示对厚度积分的正力、剪力和力矩. 这些面力与应力张量 $\boldsymbol{T}$ 的关系如下:

$$\begin{aligned}N_z&=\int_{-h/2}^{+h/2}T_{zz}\left(1-\frac{x}{r}\right)\mathrm{d}x\approx hT_{zz},\\Q_z&=\int_{-h/2}^{+h/2}T_{rz}\left(1-\frac{x}{r}\right)\mathrm{d}x\approx hT_{rz},\\N_\theta&=\int_{-h/2}^{+h/2}T_{\theta\theta}\left(1-\frac{x}{r}\right)\mathrm{d}x\approx hT_{\theta\theta},\\M_z&=\int_{-h/2}^{+h/2}T_{zz}x\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{2}$$

式中 x 为被积分点到中性面的距离, 如图 2(c) 所示.

引入惯性力项, 将 (1) 式改写并化简为动力平衡方程. 由于薄壳的转动惯性力矩 $I\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$ 可以忽略[19], 同时考虑法向振动 w 是弯曲模态的主要组成, 忽略 z 方向的惯性力项 $\rho h\dfrac{\partial^2\eta_z}{\partial t^2}$ (即不考虑径长耦合), 将方程简化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N_z}{\partial z}=0,\quad\dfrac{\partial M_z}{\partial z}=Q_z,\\[2mm]\dfrac{\partial Q_z}{\partial z}+\dfrac{N_\theta}{r_0}=\rho h\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}.\end{cases}\tag{3}$$

2.2 几何方程与压电本构方程

由板壳理论, 将距离中性面 x 处的纤维轴向正应变 S_{zz} 与切向正应变表示为挠度 w 的形式, 即几何方程:

$$S_{zz}=-x\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},\quad S_{\theta\theta}=-\frac{w}{r_0}. \tag{4}$$

对于本文讨论的压电材料, 其本构方程由压电方程组描述[20], 式中 $\boldsymbol{d}_{\mathrm{t}}$ 为压电耦合矩阵 $\boldsymbol{d}$ 的转置:

$$\begin{cases}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{s}^{\mathrm{E}}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{d}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{E},\\ \boldsymbol{D}=\boldsymbol{d}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}.\end{cases} \tag{5}$$

讨论径向极化压电圆环, 定义 z, θ, r 分别为 1, 2, 3 轴 (避免对相关矩阵进行空间变换). 将应力与应变张量用 6 个独立变量表示: $S_1=S_{zz}$, $S_2=S_{\theta\theta}$, $S_3=S_{rr}$, $S_4=2S_{\theta r}$, $S_5=2S_{rz}$, $S_6=2S_{z\theta}$, 且 $D_1=D_z$, $D_2=D_\theta$, $D_3=D_r$. 考虑压电陶瓷的横向各向同性, 有本构方程:

$$\begin{Bmatrix}S_{zz}\\S_{\theta\theta}\\S_{rr}\\2S_{\theta r}\\2S_{rz}\\2S_{z\theta}\\D_z\\D_\theta\\D_r\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}s_{11}^{\mathrm{E}}&s_{12}^{\mathrm{E}}&s_{13}^{\mathrm{E}}&0&0&0&0&0&d_{31}\\s_{12}^{\mathrm{E}}&s_{11}^{\mathrm{E}}&s_{13}^{\mathrm{E}}&0&0&0&0&0&d_{31}\\s_{13}^{\mathrm{E}}&s_{13}^{\mathrm{E}}&s_{33}^{\mathrm{E}}&0&0&0&0&0&d_{33}\\0&0&0&s_{44}^{\mathrm{E}}&0&0&0&d_{15}&0\\0&0&0&0&s_{44}^{\mathrm{E}}&0&d_{15}&0&0\\0&0&0&0&0&s_{66}^{\mathrm{E}}&0&0&0\\0&0&0&0&d_{15}&0&\varepsilon_{11}^{\mathrm{T}}&0&0\\0&0&0&d_{15}&0&0&0&\varepsilon_{11}^{\mathrm{T}}&0\\d_{31}&d_{31}&d_{33}&0&0&0&0&0&\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_{zz}\\T_{\theta\theta}\\T_{rr}\\T_{\theta r}\\T_{rz}\\T_{z\theta}\\E_z\\E_\theta\\E_r\end{Bmatrix}. \tag{6}$$

2.3 振动方程推导

由 (5) 式及 $T_{rr}=0$, 轴向与切向正应变可以表示为

$$\begin{cases}S_{zz}=s_{11}^{\mathrm{E}}T_{zz}+s_{12}^{\mathrm{E}}T_{\theta\theta}+d_{31}E_\theta,\\ S_{\theta\theta}=s_{12}^{\mathrm{E}}T_{zz}+s_{11}^{\mathrm{E}}T_{\theta\theta}+d_{31}E_r.\end{cases} \tag{7}$$

将其代入几何方程 $S_{zz}=-x\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}$, $S_{\theta\theta}=-w/r_0$, 令 $v_{12}=-s_{12}^{\mathrm{E}}/s_{11}^{\mathrm{E}}$ 为 $\theta\to z$ 方向的泊松比, 则:

$$\begin{aligned}T_{zz}=&\frac{1}{s_{11}^{\mathrm{E}}(1-v_{12}^2)}\\&\times\left[-x\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-v_{12}\frac{w}{r_0}-(1+v_{12})d_{31}E_r\right].\end{aligned} \tag{8}$$

因此, 平衡方程中的弯矩为

$$\begin{aligned}M_z=&\int_{-h/2}^{+h/2}T_{zz}x\mathrm{d}x\\=&-\frac{h^2}{3s_{11}^{\mathrm{E}}(1-v_{12}^2)}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}x^3\Big|_{-h/2}^{h/2}-v_{12}\frac{w}{2r_0}x^2\Big|_{-h/2}^{h/2}\\&-\frac{1+v_{12}}{2}d_{31}E_rx^2\Big|_{-h/2}^{h/2}\\=&-\frac{h^3}{12s_{11}^{\mathrm{E}}(1-v_{12}^2)}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+0.\end{aligned} \tag{9}$$

可以发现, T_{zz} 的后两项对弯矩并无贡献. 即压电圆环弯曲时其抗弯刚度 $D=\dfrac{h^3}{12s_{11}^{\mathrm{E}}(1-v_{12}^2)}$ 与无源材料相同, 不受到压电效应影响.

将 (9) 式代入 (3) 式, 可得 r 方向平衡方程:

$$-\frac{h^3}{12s_{11}^{\mathrm{E}}(1-v_{12}^2)}\frac{\partial^4 w}{\partial z^4}+\frac{N_\theta}{r_0}=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{10}$$

已知 $N_\theta=\displaystyle\int_{-h/2}^{+h/2}T_{\theta\theta}(1-x/r)\mathrm{d}x\approx hT_{\theta\theta}$, 由 (6) 式和 (4) 式可得

$$\begin{cases}S_{\theta\theta}=s_{12}^{\mathrm{E}}T_{zz}+s_{11}^{\mathrm{E}}T_{\theta\theta}+d_{31}E_r=-w/r_0,\\ T_{\theta\theta}=-\dfrac{w/r_0+d_{31}E_r+s_{12}^{\mathrm{E}}T_{zz}}{s_{11}^{\mathrm{E}}},\end{cases} \tag{11}$$

由 (3) 式和 (2) 式可得 $\dfrac{\partial T_{zz}}{\partial z}=\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial N_z}{\partial z}=0$, $T_{zz}=$ const.. 由于弯曲振动其轴向自由, 应力较小, 不妨认为 $T_{zz}=0$. 联立 (11) 式得

$$N_{\theta\theta}=-h\frac{w/r_0+d_{31}E_r}{s_{11}^{\mathrm{E}}}. \tag{12}$$

2.3.1 电学短路

对于内外壁接地的径向极化圆环 (有电极), 在两电极相距较近时使压电陶瓷内部场强为零, 即 $E_r=0$. 将 (12) 式代入 (10) 式可得电学短路振动

方程:

$$-\frac{h^3}{12s_{11}^{\mathrm{E}}(1-v_{12}^2)}\frac{\partial^4 w}{\partial z^4}-\frac{h}{s_{11}^{\mathrm{E}}}\frac{w}{r_0^2}=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{13}$$

2.3.2 电学开路

若径向极化的圆环内外壁悬空 (无电极), 或者两电极相距较远时, 压电陶瓷内部不满足 $E_r=0$ 条件. 由于电压陶瓷为非导电介质, 内部无自由电荷, 则应满足无源静电场中的麦克斯韦方程 (柱坐标):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial D_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=0. \tag{14}$$

而由基本假设中 $T_{\theta r}=0$ 和本构方程 (6) 得到:

$$D_\theta=d_{15}T_{\theta r}+\varepsilon_{11}^{\mathrm{T}}E_\theta=\varepsilon_{11}^{\mathrm{T}}E_\theta, \tag{15}$$

而 $2S_{\theta r}=s_{44}^{\mathrm{E}}T_{\theta r}+d_{15}E_\theta=0\Rightarrow E_\theta=0$ 即 $D_\theta=0$. 将本构方程 (6) 中的电位移 D_r, D_z 分量展开, 代入 (14) 式得:

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}}E_r+d_{31}T_{zz}+d_{31}T_{\theta\theta}}{r}\\&+\frac{\partial}{\partial r}(\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}}E_r+d_{31}T_{zz}+d_{31}T_{\theta\theta})\\&+\varepsilon_{11}^{\mathrm{T}}\frac{\partial E_z}{\partial z}+d_{15}\frac{\partial T_{rz}}{\partial z}=0.\end{aligned} \tag{16}$$

对该电学方程进行一些必要简化: 对于该薄壳模型认为电场、应力在 r 方向均匀, 即物理量关于 r 的一阶导为 0. 由于径向极化加电, 忽略 z 方向电场, (16) 式变为

$$\frac{\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}}E_r+d_{31}T_{\theta\theta}}{r_0}+d_{15}\frac{\partial T_{rz}}{\partial z}=0, \tag{17}$$

由 (3) 式中力矩平衡方程、(9) 式和 (2) 式, 可得

$$T_{rz}=\frac{Q_z}{h}=-\frac{Eh^2}{12(1-v^2)}\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}, \tag{18}$$

将 (18) 式代入 (17) 式, 然后结合 (12) 式可以得到关于 $T_{\theta\theta}$ 的方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}}E_r+d_{31}T_{\theta\theta}}{r_0}-d_{15}\dfrac{Eh^2}{12(1-v^2)}\dfrac{\partial^4 w}{\partial z^4}=0,\\[2ex] T_{\theta\theta}=-\dfrac{w/r_0+d_{31}E_r}{s_{11}^{\mathrm{E}}},\end{cases} \tag{19}$$

消去 E_r, 得

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{d_{31}^2}{\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}}s_{11}^{\mathrm{E}}}\right)T_{\theta\theta}\\&=-\frac{w}{s_{11}^{\mathrm{E}}r_0}-\frac{d_{31}d_{15}}{\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}}s_{11}^{\mathrm{E}}}\frac{h^2r_0}{12s_{11}^{\mathrm{E}}(1-v_{12}^2)}\frac{\partial^4 w}{\partial z^4},\end{aligned} \tag{20}$$

令机电耦合系数满足 $k_{31}^2=\dfrac{d_{31}^2}{\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}}s_{11}^{\mathrm{E}}}$, 将 (20) 式代入 (10) 式得电学开路振动方程:

$$\begin{aligned}&-\left[1+\frac{d_{31}d_{15}}{(1-k_{31}^2)\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}}s_{11}^{\mathrm{E}}}\right]\frac{h^3}{12s_{11}^{\mathrm{E}}(1-v_{12}^2)}\frac{\partial^4 w}{\partial z^4}\\&-\frac{h}{s_{11}^{\mathrm{E}}}\frac{w}{(1-k_{31}^2)r_0^2}=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.\end{aligned} \tag{21}$$

3 振动方程解析求解

(13) 式和 (21) 式形式相似, 令径向位移 $w(z,t)=W(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, 有频域振动方程:

$$\frac{\mathrm{d}^4W(z)}{\mathrm{d}z^4}-p^4W(z)=0, \tag{22}$$

式中声速 p 为大于 0 的正实数, 且考虑令波速 $c=1/\sqrt{\rho s_{11}^{\mathrm{E}}}$, 波数 $k=\omega/c$, 其中

$$p^4=\begin{cases}\dfrac{12(1-v_{12}^2)}{h^2}\left(k^2-\dfrac{1}{r_0^2}\right), & \text{电学短路},\\[3ex] \dfrac{12(1-v_{12}^2)}{h^2}\dfrac{k^2-\dfrac{1}{(1-k_{31}^2)r_0^2}}{1+\dfrac{d_{31}d_{15}}{(1-k_{31}^2)\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}}s_{11}^{\mathrm{E}}}}, & \text{电学开路}.\end{cases} \tag{23}$$

方程 (22) 通解可以表示为

$$\begin{aligned}W(z)=&A\cosh(pz)+B\sinh(pz)\\&+C\cos(pz)+D\sin(pz).\end{aligned} \tag{24}$$

3.1 谐振频率

考虑压电圆环在水中工作时两端往往保持自由. (9) 式展示了压电效应对弯矩没有贡献, 则两端自由边界表示为 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z^3}=0(z=0或l)$. 可得 $A=C$, $B=D$, 且有方程组:

$$\begin{cases}[N]\{a\}=0,\\[1ex] [N]=\begin{bmatrix}p^2\cosh(pl)-p^2\cos(pl) & p^2\sinh(pl)-p^2\sin(pl)\\ p^3\sinh(pl)+p^3\sin(pl) & p^3\cosh(pl)-p^3\cos(pl)\end{bmatrix}, \quad \{a\}=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}.\end{cases} \tag{25}$$

令 $|N|=0$ 得频率方程:

$$\cos(pl)\cosh(pl)=1. \tag{26}$$

设超越方程 $\cos(x)\cosh(x)=1$ 解为 μ_n，其有近似解 $\mu_n\approx\dfrac{3\pi}{2}+(n-1)\pi=\dfrac{(2n+1)\pi}{2}$，代入不同 n 计算可发现误差较小, 如图 3 所示.

将频率参量 $p_n=\dfrac{\mu_n}{l}\approx\dfrac{3\pi+(n-1)\pi}{2l}$ 代入 (23) 式, 可以得到电学短路和电学开路下谐振频率.

电学短路谐振频率为

$$f_{短路}^{(n)}=\frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{[3\pi/2+(n-1)\pi]^4h^2}{12(1-v_{12}^2)l^4}+\frac{1}{r_0^2}}. \tag{27}$$

电学开路谐振频率为

$$f_{开路}^{(n)}=\frac{c}{2\pi}\left\{\left[1+\frac{d_{31}d_{15}}{(1-k_{31}^2)\varepsilon_{33}^{\mathrm{T}}s_{11}^{\mathrm{E}}}\right]\frac{[3\pi/2+(n-1)\pi]^4h^2}{12(1-v_{12}^2)l^4}+\frac{1}{(1-k_{31}^2)}\frac{1}{r_0^2}\right\}^{1/2}. \tag{28}$$

若为固定、简支、载荷等其他条件使用对应边界即可, 这里不再赘述.

3.2 振动节点与振型

依旧考虑两端自由边界, 由 (25) 式得

$$\frac{B}{A}(n)=-\frac{\cosh(p_nl)-\cos(p_nl)}{\sinh(p_nl)-\sin(p_nl)}, \tag{29}$$

随着阶数的增高, 其比值会愈发接近 -1. 令 $B/A=Y(n)$, 第 n 阶振型函数为

$$\begin{aligned}W_n(z)=\;&\cosh(p_nz)+\cos(p_nz)\\&+Y_n\left[\sin(pz)+\sinh(pz)\right],\end{aligned} \tag{30}$$

频域振动方程的解 (24) 式应表示为多阶模态的叠加:

$$W(z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nW_n(z). \tag{31}$$

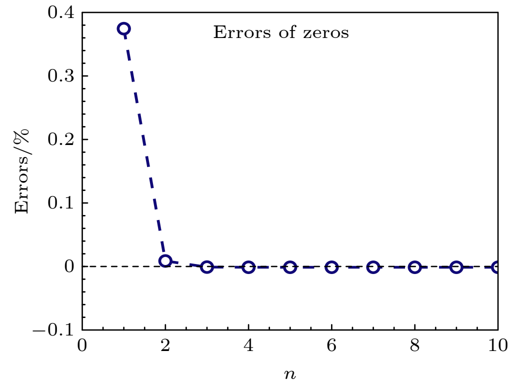

图 3 近似解与高精度数值解的误差

Fig. 3. Error between approximate solution and high precision numerical solution.

3.2.1 振动节点

令 $W_n(z)=0$, 使用数值法求得前几阶模态的节点位置在表 1 列出.

3.2.2 振 型

进一步, 对 (30) 式画出前几阶的归一化振型如图 4 所示.

4 弯曲模态的激发原理研究

对于一个特定物理结构, 其往往具有无穷多个振动模态, 然而模态的激发取决于激励本身. 在水声换能器领域, 压电陶瓷的模态激发理论一直未能明晰, 潘瑞等 [21] 基于等效电路方法给出了压电细棒的多阶模态单端激励理论, 论证了对细棒的 $1/s$ 部分进行电压激励, 可以激发出前 $2s-1$ 阶模态. 而本文所讨论的压电圆环径向弯曲采用常规激励方式 (内外壁均匀加电) 不易激发, 下面通过模态理论来进行研究.

由于电学开路和短路条件只影响谐振频率而不影响对应振型, 两种条件下满足同一激发原理.

表 1 n 阶模态对应的第 m 个节点位置 z/l

Table 1. The m-th node positions z/l corresponding to n-th order modes.

n	m						
	1	2	3	4	5	6	7
1	0.2250	0.7788	—	—	—	—	—
2	0.1321	0.5000	0.8677	—	—	—	—
3	0.0944	0.3558	0.6441	0.9076	—	—	—
4	0.0735	0.2768	0.4997	0.7298	0.8749	—	—
5	0.0601	0.2265	0.4091	0.5909	0.7727	0.9545	—
6	0.0509	0.1916	0.3462	0.5000	0.6538	0.8077	0.9615

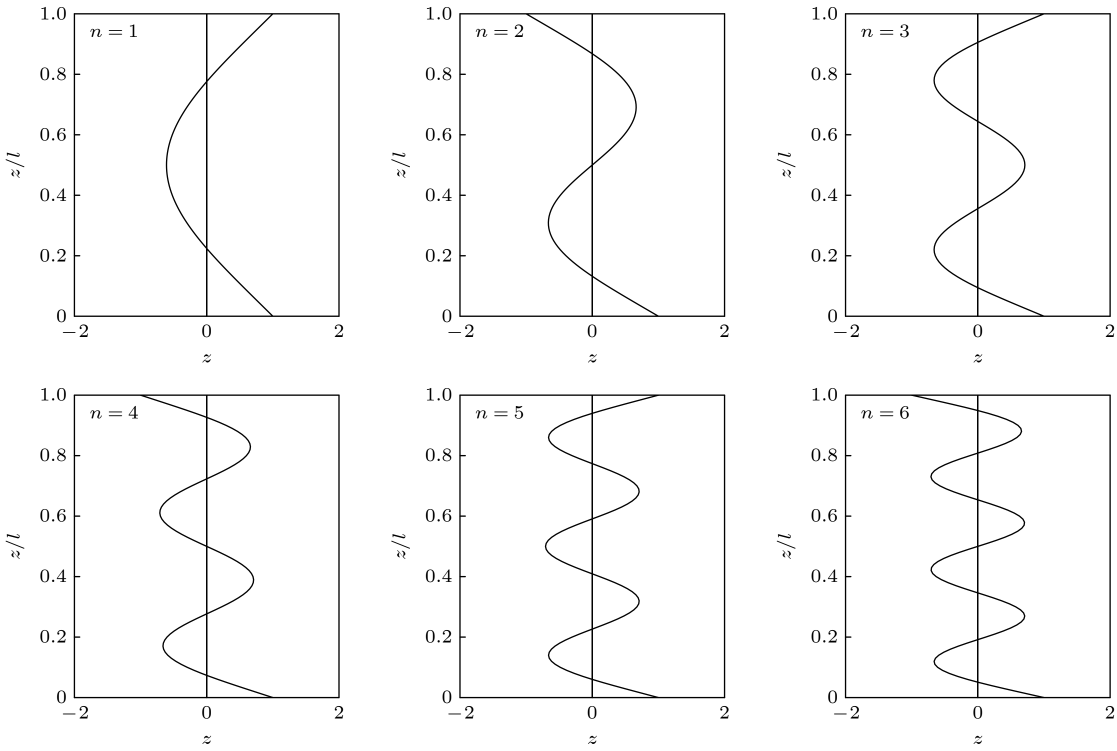

图 4 前六阶的振型

Fig. 4. The first six order mode shapes.

令外壁电势为 0, 内壁施加电压分布 $V(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, 电压幅值 $V(z)$ 是关于 z 的函数. 将 $E_r(z,t)=\dfrac{V(z)}{h}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 代入 (12) 式, 使自由振动方程 (13) 变为受迫振动下的非齐次方程:

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{h^3}{12s_{11}^{\mathrm{E}}(1-v_{12}^2)}\frac{\partial^4 w}{\partial z^4}+\frac{h}{s_{11}^{\mathrm{E}}}\frac{w}{r_0^2}=-\frac{d_{31}V}{s_{11}^{\mathrm{E}}r_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\tag{32}$$

其中, $d_{31}V/s_{11}^{\mathrm{E}}r_0$ 为 $2\pi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ 微元上所受面力, 可以将 $N=d_{31}/s_{11}^{\mathrm{E}}r_0$ 定义为机电转换系数.

进一步, 对 (32) 式有稳态方程:

$$\frac{\mathrm{d}^4W(z)}{\mathrm{d}z^4}-p^4W(z)=\frac{12d_{31}(1-v_{12}^2)}{h^3r_0}V(z),\tag{33}$$

由模态理论, 不同阶的振型函数 (30) 式共同构成一个线性空间, 其正交完备 (该振型与梁的弯曲类似[22], 其正交完备性容易证明). 此时坐标 z 为物理坐标, 而 (31) 式中振型系数 A_n 为简正坐标, 定义以振型 $W_n(z)$ 为基向量的积分变换 $\mathcal{T}$:

$$A_n=\mathcal{T}W(z)=\int_0^l W_n(z)\mathrm{d}z,$$

$$W(z)=\mathcal{T}^{-1}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}A_nW_n(z).\tag{34}$$

实际上若圆环两端为固定边界, 其基向量为三角函数, 对应的 $\mathcal{T}$ 是更常见的空间傅里叶变换. 对 (33) 式作 $\mathcal{T}$ 变换, 使稳态方程在简正坐标中求解, 得

$$\mathcal{T}\frac{\mathrm{d}^4(\mathcal{T}^{-1}A_n)}{\mathrm{d}z^4}-\mathcal{T}p^4(\mathcal{T}^{-1}A_n)=\mathcal{T}\left[\frac{12d_{31}(1-v_{12}^2)}{h^3r_0}V(z)\right].\tag{35}$$

展开 (35) 式并考虑到三角函数与双曲函数的求导关系 $\dfrac{\mathrm{d}^4W_n(z)}{\mathrm{d}z^4}=p_n^4W_n(z)$, 该积分变换可将四阶微分方程 (33) 变为简正坐标中的代数方程:

$$\int_0^l\left[p_n^4\sum_{m=1}^{\infty}A_nW_m(z)\right]W_n(z)\mathrm{d}z-\int_0^l\left[p^4\sum_{m=1}^{\infty}A_nW_m(z)\right]W_n(z)\mathrm{d}z=\frac{12d_{31}(1-v_{12}^2)}{h^3r_0}\int_0^l V(z)W_n(z)\mathrm{d}z.\tag{36}$$

考虑正交性, (36) 式可变换为

$$A_n=\frac{12d_{31}(1-v_{12}^2)}{h^3r_0}\frac{\displaystyle\int_0^l V(z)W_n(z)\mathrm{d}z}{(p_n^4-p^4)\displaystyle\int_0^l W_n(z)W_n(z)\mathrm{d}z}.\tag{37}$$

令 $\int_0^l W_n(z)W_n(z)\mathrm{d}z=\delta(n)$, 有 $\delta(1)=0.8901$, $\delta(2)=1.0796\cdots$, $\delta(n)$ 是只与振型函数相关的非零量, 因此 (37) 式充分反映了激励源对于不同阶模态的影响. 一方面分母中 $p_n^4-p^4$ 表示激励频率与第 n 阶谐振频率相差越远, 则该阶振型系数 A_n 越小, 由于模型中未考虑阻尼, $p_n^4-p^4=0$ 时该模态系数 $A_n\to\infty$; 另一方面 A_n 取决于电压分布 $V(z)$, 即激励对不同模态的强弱作用. 对 (37) 式, 电压可以顺利激发出第 n 阶模态的条件: $\int_0^l V(z)W_n(z)\mathrm{d}z\neq 0$. 定义 $G_n=\int_0^l V(z)W_n(z)\mathrm{d}z$ 为第 n 阶的模态权值 (即简正坐标中的广义电压), 以反映电压分布对不同阶振型系数的影响.

4.1 单模态激励

由于模态的正交性, 当电压分布与第 m 阶振型相同即 $V(z)=V_0W_m(z)$ 时, 有

$$G_n=V_0\int_0^l W_m(z)W_n(z)\mathrm{d}z=V_0\begin{cases}0, & (n\neq m)\\ \delta(n), & (n=m)\end{cases} \tag{38}$$

因此如果采用和第 n 阶振型函数相同的电压分布函数进行激励, 则压电圆环只会激发出第 n 阶弯曲模态, 而不会激发出其他阶. 依据此方法可以获得纯粹的单阶振动.

在实际情况中, 对压电材料施加连续的电压分布较为困难, 可以采用如图 5 所示的近似激励方法, 将连续化的电压函数变为不连续的分段函数. 显然, 分段数越多, 其激励效果将越接近理论值. 后文将实验证明该方法对于单模态激励的可行性.

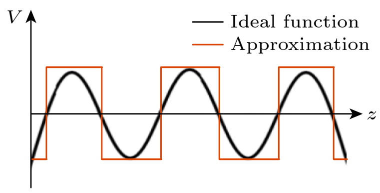

图 5 电压函数的分段近似

Fig. 5. Segmental approximation of the voltage function.

4.2 局部等幅激励

考虑对压电圆环 z 方向上只有部分内外壁施加电压激励 (依然轴对称, 只在 z 方向上加电不均匀, 具有激励段与非激励段), 假设对压电圆环在 b–a 的长度上施加等幅电压激励, $V(z)$ 满足 (39) 式, 图 6 是其示意图.

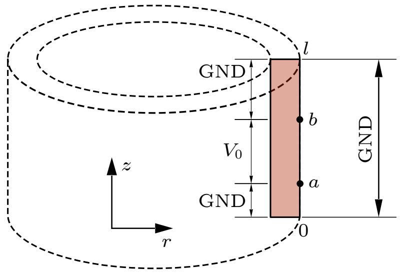

图 6 局部等幅激励

Fig. 6. Local equal amplitude excitation.

$$V(z)=\begin{cases}0, & (0<z<a\text{或}b<z<l),\\ V_0, & (a\leqslant z\leqslant b).\end{cases} \tag{39}$$

则有

$$\begin{aligned}G_n&=\int_0^l V(z)W_n(z)\mathrm{d}z\\ &=V_0[\sin(p_nz)+\sin(p_nz)\\ &\quad+Y(n)\cdot(\cosh(p_nz)-\cosh(p_nz))]|_a^b\end{aligned} \tag{40}$$

取 $V_0=1$, 可以得到积分的数值解. 图 7 是不同的激励区间 $[a,\ b]$ 对前六阶模态的作用情况. 采用局部等幅激励的方式, 要使得某一模态的振动较强, 需要选取合适的 a 与 b 使模态权值 G_n 最大.

4.3 单端激励

进一步考虑 $a=0$ 的特例情况, 即单端激励. 可得到不同的激励长度对所能激发的模态强弱的影响, 如图 8 所示. 可以发现对于单端激励, 激励长度对不同阶模态的影响是不一样的. 在 $b/l=1$ 时, 由于各振型系数皆为 0, 因此用常规全激励的方法无法激发出弯曲模态.

通过数值法可以求得, (40) 式中, 当 $n=5$ 时, $V_0\int_0^b W_n(z)\mathrm{d}z$ 第一个 $b\neq 0$ 的零点 $b_{\text{zero}}\approx 0.1322$. 当 $b/l<0.1322$, 此时必定可激发出前五阶的所有模态. 表 2 为采用单端激励方法激发出前 n 阶模态的激励长度约束.

表 2 单端激励激发出前 n 阶模态对应激励长度

Table 2. Excitation lengths of the first n order modes with single-ended excitation.

n	1	2	3	4	5
$b/l_{\max}$	0.5019	0.2904	0.2077	0.1616	0.1322

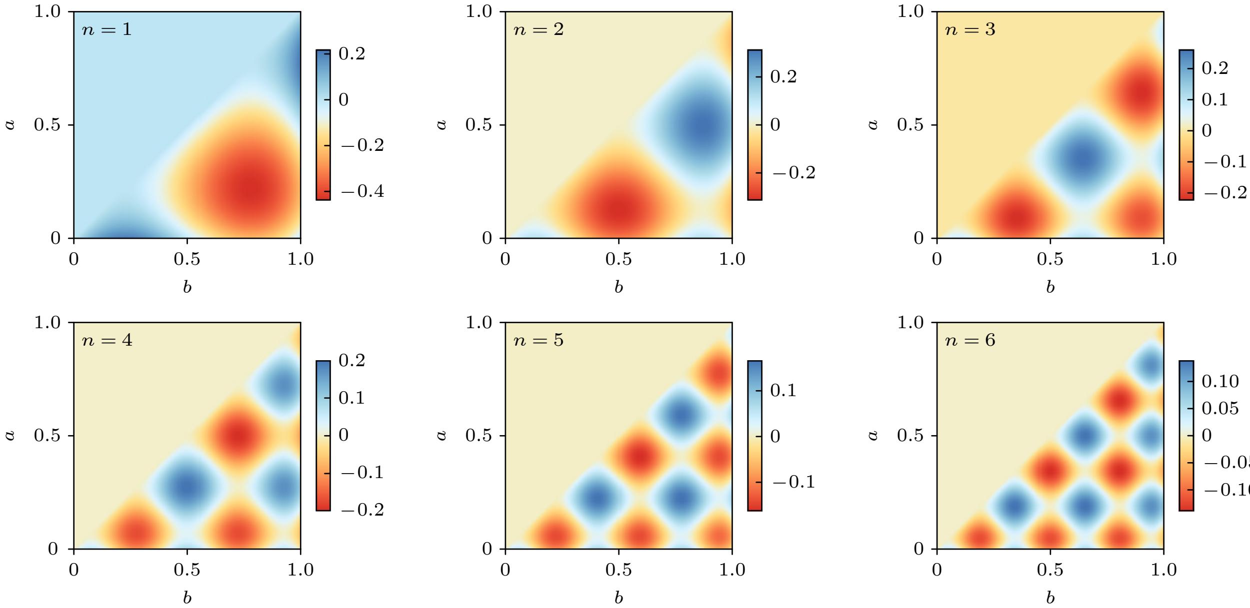

图 7 区间 $[a, b]$ 激励下不同阶模态权值 G_n

Fig. 7. Modal weights G_n of different orders under excitation in interval $[a, b]$.

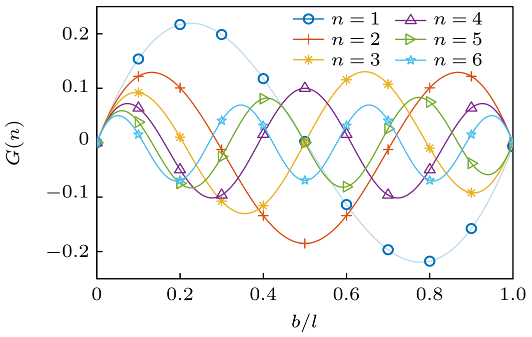

图 8 单端激励长度对不同阶模态影响

Fig. 8. Effect of single-ended excitation length on different order modes.

与前文单模态激励只激发某阶特定模态相对应, 采用单端激励方法, 可以激发出前 n 阶所有模态. 从图 8 可以看到: 1) 对于同一长度单端激励, 越高阶的模态权值越小, 即越高阶振动越微弱; 2) 对于不同长度单端激励, 激励长度越短, 可激发出模态阶数越多, 但所有模态的振动也更弱.

在满足可激发条件下, 为了达到有效的模态激发效果, 应该选取合适激励长度使目标模态的 G_n 取极大值, 而对多个模态实现精细化调控则可采用分段多激励方式.

4.4 多激励

多激励驱动一直是水声换能器领域关于驱动方面的研究重点, 可以实现拓宽带宽、调节模态等功能[23]. 考虑在 $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]\cdots$, $[a_n, b_n]$ 等区间施加等幅电压激励, 显然根据积分的可加性:

$$\begin{aligned} G_n &= \int_0^l V(z)W_n(z)\mathrm{d}z \\ &= V_1\int_{a_1}^{b_1} W_n(z)\mathrm{d}z + V_2\int_{a_2}^{b_2} W_n(z)\mathrm{d}z + \cdots \\ &\quad + V_m\int_{a_n}^{b_m} W_n(z)\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{41}$$

即多激励的模态权值 G_n 是不同局部等幅激励的线性叠加, 采用该方式可更大限度调节各个模态强弱分量. 对于一些简单激励如双激励、三激励等, 其计算较为方便, 具有较大的应用价值.

5 有限元仿真、实验测试与理论比对

5.1 有限元仿真

在前文对激励电压的讨论中可知, 激励源只会影响到模态权值 G_n, 即模态的激发与否和强弱, 而不会影响压电圆环的谐振频率. (27) 式和 (28) 式得到了关于压电圆环弯曲模态谐振频率的两种表达, 即电学短路谐振频率 $f_{\text{short}}^{(n)}$ 与电学开路谐振频率 $f_{\text{open}}^{(n)}$. 由于径向弯曲振动时存在大小几乎一致的反相区, r, z 两方向振动方程耦合弱, 文中相关结论在不同长径比压电圆环中仍然适用.

而圆环的径厚比对电学短路、开路条件以及薄

壳理论本身的适用范围均有较大影响, 在有限元仿真 (FEM) 中对这两式的适用性进行讨论, 有限元模型如图 9 所示. 对于不同径厚比的压电圆环 (内外壁均有电极), $f_{\text{short}}^{(n)}$, $f_{\text{open}}^{(n)}$ 与有限元所计算特征模态的误差如图 10 所示, 具体信息见附录 A.

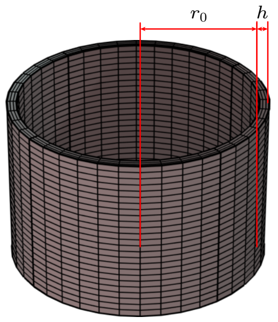

图 9 压电圆环有限元模型及网格划分

Fig. 9. Finite element model and meshing of piezoelectric ring.

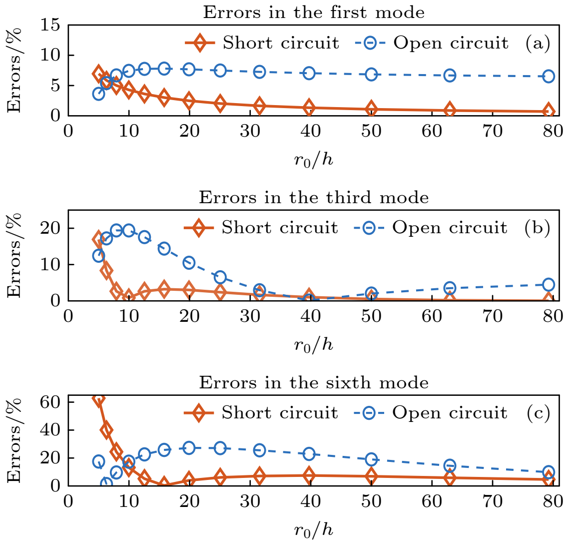

图 10 电学开路与电学短路理论误差对比 (相较于有限元) (a) 第一阶模态误差; (b) 第三阶模态误差; (c) 第六阶模态误差

Fig. 10. Comparison of theoretical errors of electrical open circuit and electrical short circuit (compared to finite element results): (a) Error in the first mode; (b) error in the third mode; (c) error in the sixth mode.

可以发现当壳较薄即两电极较近时, 更接近电学短路条件, 反之更接近电学开路条件, 式中两者具有不同的适用范围. 通过有限元仿真计算得出, 在 $r_0/h > 7$ 时, 短路频率 (27) 式更加适用; 在 $4.5 < r_0/h < 7$ 时, 开路频率 (28) 式更加适用, 图 11 分别为 $r_0/h = 5$ 与 $r_0/h = 25$ 时理论预测与有限元计算的吻合情况.

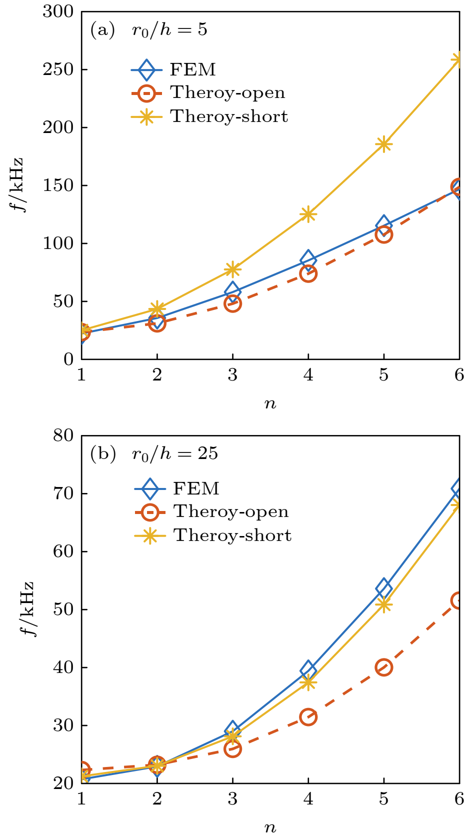

图 11 有限元计算与理论预测谐振频率 (前六阶) (a) $r_0/h = 5$; (b) $r_0/h = 25$

Fig. 11. Finite element calculation and theoretical prediction of resonance frequency (first six orders): (a) $r_0/h = 5$; (b) $r_0/h = 25$.

此处未谈及薄壳理论本身的局限, 实际上本文的开路理论认为电场沿 r 均匀, 会使得谐振频率偏低, 一定程度上修正了薄壳理论在壳较厚时谐振频率偏高的误差. 当 $r_0/h < 4.5$ 时, 由于模型已完全不满足薄壳条件, 使电学开路时的频率估计误差较大; 而当 $r_0/h > 20$ 时, 薄壳理论足够精确、电学短路条件较为满足, 使得理论预测足够准确 (前六阶误差皆小于 5%).

5.2 实验测试

针对压电圆环的前五阶弯曲模态进行实验测试. 使用径向极化 PZT-46 压电圆环, 尺寸 $\Phi54\times\Phi50\times36$ mm, 表 3 是 PZT-46 压电陶瓷的相关参数. 图 12 中样品 A, B, C, D, E 在内外壁进行银层切缝处理, 切缝位置处于弯曲振动节点处, 以实现单模态激励. 另有样品 F 在其距离顶部 3 mm 处进行银层切缝处理, 进行单端激励, 此时满足单端激励长度 $b/l = 1/12 < (b/l)_{\max} = 0.13$, 即理论上可

表 3 PZT-46 压电陶瓷的材料参数

Table 3. Material parameters of PZT-46 piezoelectric ceramics.

s_{11}^{E}/Pa^{-1}	ρ/(kg·m^{-3})	ε_{33}^{T}/(F·m^{-1})	d_{31}/(C·N^{-1})	d_{15}/(C·N^{-1})	v_{12}	k_{31}
14.31×10^{-12}	7750	11.51×10^{-9}	-1.56×10^{-10}	4.96×10^{-10}	0.33	0.365

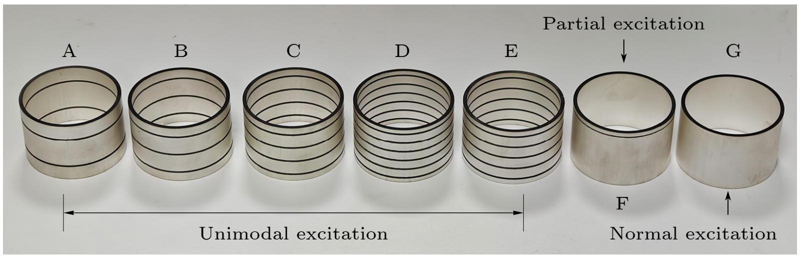

图 12 压电圆环样品

Fig. 12. Piezoelectric ring sample.

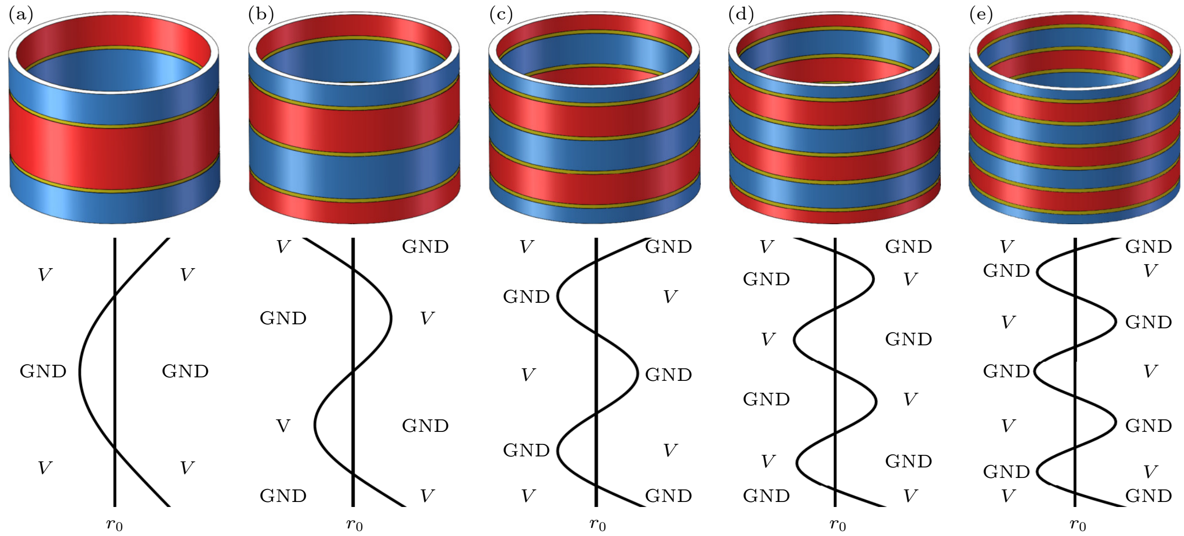

图 13 单模态激励示意图 (三维图红色为正极, 蓝色为负极)

Fig. 13. Schematic of conformal excitation (red is positive and blue is negative in 3D).

以激发出前五阶所有模态. 图 13 和图 14 为这些压电圆环的电压激励示意图.

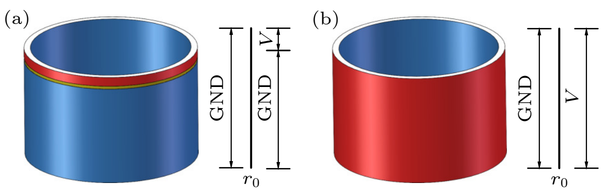

图 14 单端激励 (a) 与常规激励 (b) 示意图

Fig. 14. Schematic diagram of single-ended excitation (a) and conventional excitation (b).

图 15 为实验现场图. 使用阻抗分析仪测量各个压电圆环电导曲线, 并提取峰值处频率, 利用激光测振仪判断该阶弯曲模态是否被激发. 激光测振得到的单端激励振型及振速响应如图 16 所示, 通过该单端激励的方法同时激发出了前五阶弯曲模态, 且越低阶模态振动越强, 与激励理论一致. 图 17 是单端激励圆环和完整圆环的电导曲线与理论计算频率对比, 因为环的径厚比满足前文讨论的电学短路条件, 谐振频率与 $f_{\text{short}}^{(n)}$ 较为吻合, 可以看到电导谐振峰与理论值一一对应, 通过激光测振仪的振型图 16 判断, 第 1, 5 个峰分别为圆环的呼吸模态与轴向纵振模态.

通过振型图佐证, 该压电圆环的弯曲谐振频率分别为 19.7, 24.7, 36.1, 52.6, 72.8 kHz; 呼吸谐振频率 18.8 kHz, 轴向谐振频率 45.4 kHz. 表 4 为实验测试与有限元仿真、理论计算对比, 可以发现理论计算精确度较高 (误差低于 5%).

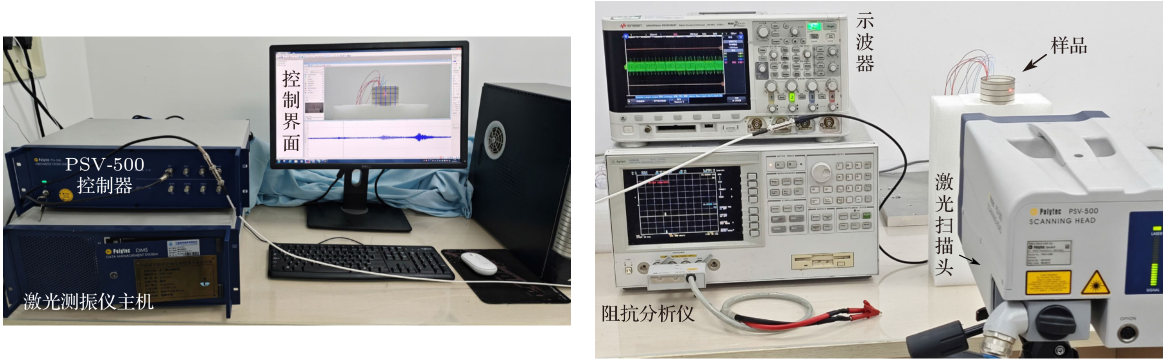

图 15 电导纳及激光测振系统

Fig. 15. Admittance and laser vibration measurement system.

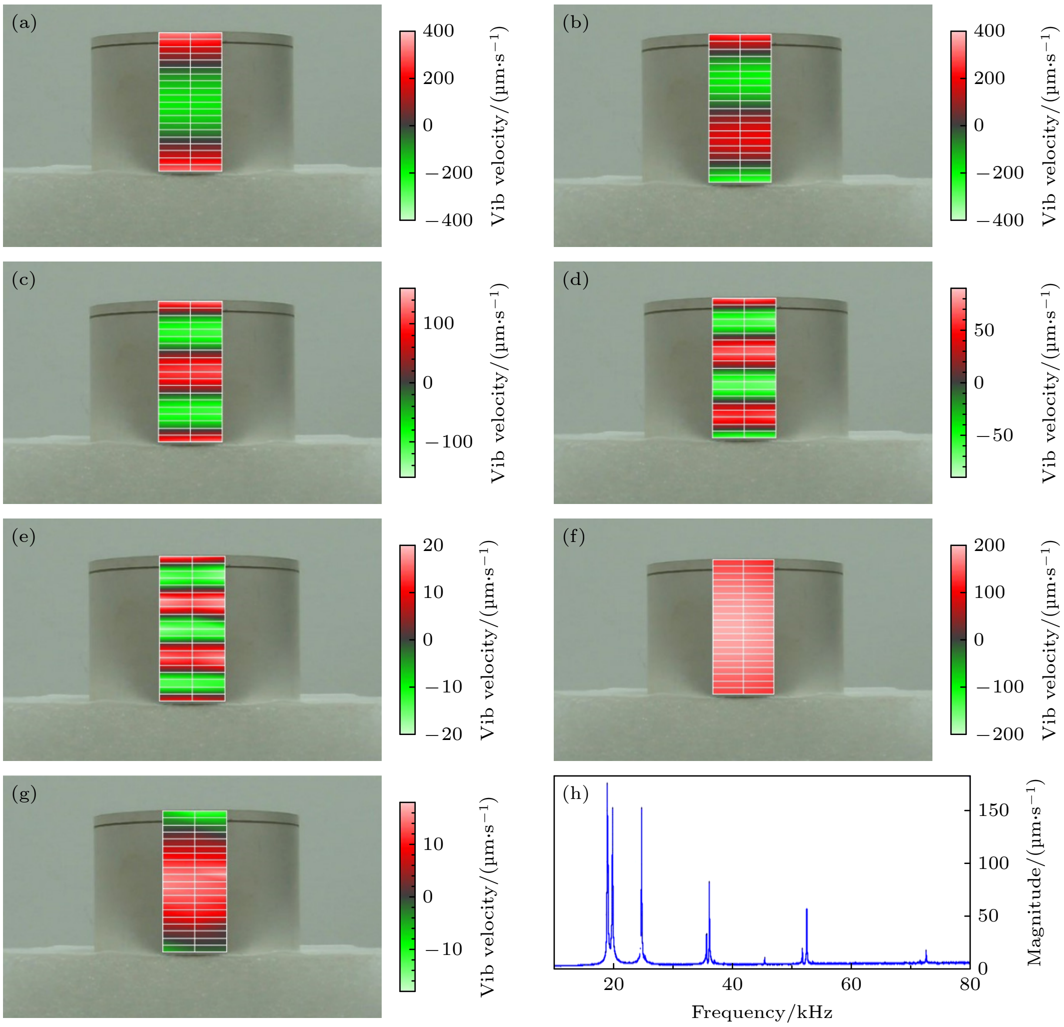

图 16 单端激励的激光测振图 (a) $f = 19656$ Hz; (b) $f = 24656$ Hz; (c) $f = 36094$ Hz; (d) $f = 52594$ Hz; (e) $f = 72813$ kHz; (f) $f = 18750$ Hz; (g) $f = 45500$ Hz; (h) 平均振速幅频响应

Fig. 16. Vibration with single-ended excitation: (a) $f = 19656$ Hz; (b) $f = 24656$ Hz; (c) $f = 36094$ Hz; (d) $f = 52594$ Hz; (e) $f = 72813$ kHz; (f) $f = 18750$ Hz; (g) $f = 45500$ Hz; (h) mean amplitude-frequency response of the vibration rate.

图 18 为单模态激励压电圆环的电导纳曲线, 发现虽然图 13 所示电势分布并未严格与振型分布相同, 而只是采用宽泛的近似, 但模态的激发符合预期: 每个单模态激励圆环主要激发了对应弯曲模态, 而其他阶的弯曲模态分量较小或未激发. 注意到, 处于 45.4 kHz 的轴向纵振模态仅被圆环 A 所激发, 这是一阶弯曲振型与纵振振型相似导致, 同时所有圆环皆规避了常规激励方法下的呼吸模态.

值得说明的是，在单端激励与单模态激励实验中，图 16(h)、图 17(a) 和图 18 皆展示了高阶弯曲模态的电导曲线与振速幅频曲线在谐振峰处有“分叉”现象. 文中理论采用轴对称模型，而压电圆环样品周向存在不均匀度，这也是表 4 中有限元计算理论误差的主要来源. 经测量最薄处为 2.1 mm，最厚处为 2.2 mm，由弯曲谐振频率 (27) 式和 (28) 式可知阶数 n 越大，厚度 h 对谐振频率影响越大，即样品的周向不均匀使得高阶谐振处电导更容易“分叉”.

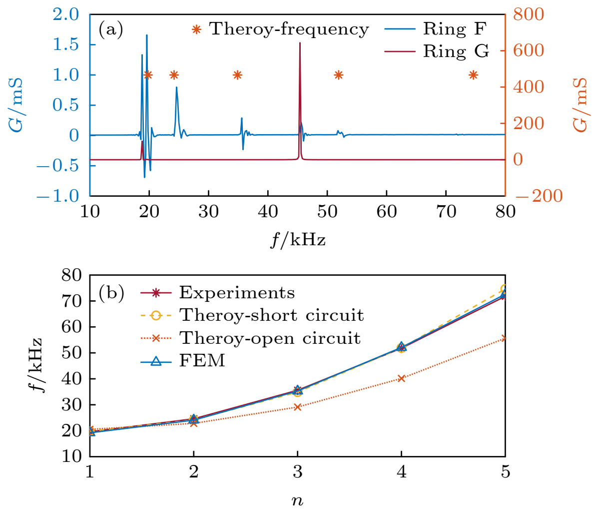

图 17 单端激励实验电导曲线及谐振频率 (a) 单端激励、全激励电导曲线与理论计算弯曲谐振频率; (b) 理论计算、有限元仿真与实验的谐振频率对比

Fig. 17. Experimental conductance curves and resonance frequencies for single-ended excitation: (a) Single-ended excitation, full excitation conductance curves and theoretically calculated bending resonance frequencies; (b) comparison of theoretically calculated, finite element simulation and experimental resonance frequencies.

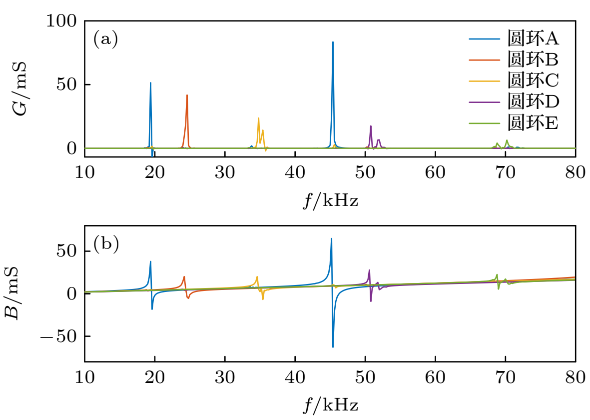

图 18 单模态激励圆环的电导纳曲线 (a) 电导; (b) 电纳

Fig. 18. Admittance curves of a conformally excited circular ring: (a) Conductance; (b) susceptance.

表 4 前五阶弯曲模态谐振频率对比

Table 4. Comparison of the first five orders resonance frequencies of bending modes.

阶数n	实验/Hz	FEM/Hz	理论/Hz	FEM误差/%	理论误差/%
1	19656	19423	19795	1.19	0.71
2	24656	24162	24192	2.00	1.88
3	36094	35537	34881	1.54	3.36
4	52594	52182	51921	0.78	1.28
5	72813	72685	74623	0.18	2.49

图 19 是圆环 D 单模态激励时谐振附近两振速峰的激光测振图，这种周向不对称性体现得较为明显.

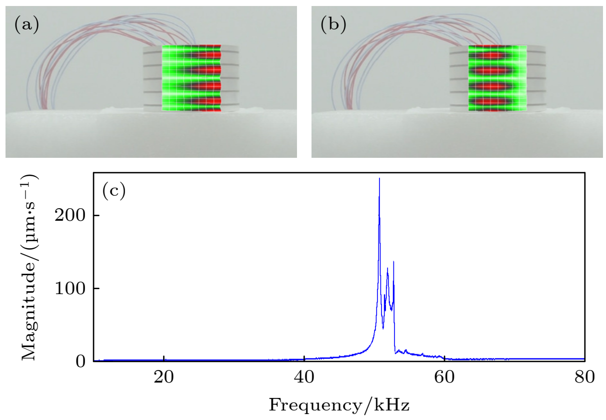

图 19 周向不均匀导致的双峰 (a) $f = 50750$ kHz; (b) $f = 52781$ kHz; (c) 平均振速幅频曲线

Fig. 19. Double peak due to circumferential inhomogeneity: (a) $f = 50750$ kHz; (b) $f = 52781$ kHz; (c) mean amplitude-frequency response of the vibration rate.

6 结 论

本文对压电圆环径向弯曲振动进行相关研究，结合有限元仿真和实验测试，得出以下结论.

1) 得到的电学短路与开路条件下压电圆环径向弯曲的谐振频率表达式，经验证误差较小，可适用于压电圆环的弯曲模态频率估计.

2) 提出的压电圆环单模态激励、单端激励方法在实验中成功激励出了目标模态. 单模态激励圆环只激发了其对应的弯曲模态，而单端激励方法激发了前五阶的所有弯曲模态，模态强弱特征符合理论预测. 结合线性叠加特性，该激励方法和理论可用于多个弯曲模态的精细化调节.

本文虽然仅具体讨论了径向极化、两端自由的压电圆环，但通过材料矩阵的方向变换、改变边界

条件可直接得出不同极化方向压电圆环在不同条件下的相关参量. 而关于模态激发原理的讨论由简正空间与物理空间的积分变换关系得到, 由于大部分结构振动模态具备正交完备性, 因此相关激励方法可拓展至纵向振动、板壳弯曲等多种声学换能器振动形式. 这些声学换能器结构与本文讨论的压电圆环相比仅有振型函数的区别, 相应积分变换的基向量换为对应振型即可, 文中相关结论具备一致性.

附录 A

表 A1 列出了径厚比 r_0/h 对电学开路与电学短路理论的影响.

参考文献

[1] Butler J L, Sherman C H 2016 *Transducers and Arrays for Underwater Sound* (Cham: Springer International Publishing) p191

[2] Teng D, Wang Y, Xie K K 2018 *J. Shaanxi Norm. Uni. (Nat.*

表 A1 径厚比 r_0/h 对电学开路与电学短路理论的影响

Table A1. Influence of diameter to thickness ratio on the theory of electrical open circuit and electrical short circuit.

阶数		r_0/h												
		5.0	6.3	7.9	10.0	12.6	15.8	19.9	25.1	31.5	39.7	50.0	62.9	79.2
1	有限元/Hz	23427	22319	21596	21154	20905	20778	20726	20717	20731	20754	20781	20807	20830
	短路频率/Hz	25053	23626	22678	22060	21661	21405	21242	21138	21073	21031	21005	20989	20978
	开路频率/Hz	24276	23525	23038	22725	22526	22399	22319	22268	22236	22215	22202	22194	22189
	短路误差/%	6.94	5.85	5.01	4.28	3.62	3.02	2.49	2.03	1.65	1.34	1.08	0.87	0.71
	开路误差/%	3.63	5.40	6.68	7.43	7.75	7.80	7.68	7.48	7.26	7.04	6.84	6.67	6.52
2	有限元/Hz	40544	35696	31597	28337	25888	24139	22944	22156	21653	21340	21149	21037	20973
	短路频率/Hz	43504	36827	31904	28361	25878	24180	23044	22298	21814	21503	21304	21178	21098
	开路频率/Hz	35260	31081	28126	26090	24719	23814	23225	22845	22602	22447	22349	22287	22248
	短路误差/%	7.30	3.17	0.97	0.08	0.04	0.17	0.44	0.64	0.74	0.76	0.73	0.67	0.60
	开路误差/%	13.03	12.93	10.99	7.93	4.51	1.35	1.22	3.11	4.38	5.19	5.67	5.94	6.08
3	有限元/Hz	66373	58089	50260	43279	37378	32638	29010	26349	24478	23211	22368	21823	21477
	短路频率/Hz	77602	62943	51593	42915	36389	31585	28135	25721	24074	22974	22252	21784	21484
	开路频率/Hz	58123	48095	40510	34885	30813	27939	25963	24635	23759	23189	22822	22587	22438
	短路误差/%	16.92	8.36	2.65	0.84	2.65	3.23	3.02	2.38	1.65	1.02	0.52	0.18	0.03
	开路误差/%	12.43	17.21	19.40	19.39	17.56	14.40	10.50	6.51	2.94	0.09	2.03	3.50	4.47
4	有限元/Hz	95852	85373	74406	63912	54400	46191	39426	34073	30016	27075	24983	23555	22608
	短路频率/Hz	125279	100324	80701	65355	53452	44327	37442	32352	28680	26098	24329	23143	22362
	开路频率/Hz	91537	73949	60265	49730	41737	35787	31458	28390	26270	24839	23892	23275	22877
	短路误差/%	30.70	17.51	8.46	2.26	1.74	4.03	5.03	5.05	4.45	3.61	2.62	1.75	1.09
	开路误差/%	4.50	13.38	19.00	22.19	23.28	22.52	20.21	16.68	12.48	8.26	4.37	1.19	1.19
5	有限元/Hz	127550	115393	101969	88402	75470	63752	53614	45168	38422	33276	29389	26593	24652
	短路频率/Hz	185694	148051	118288	94818	76386	61997	50865	42363	35979	31287	27924	25576	23976
	开路频率/Hz	134507	107689	86595	70092	57284	47455	40031	34535	30563	27765	25845	24557	23707
	短路误差/%	45.59	28.30	16.00	7.26	1.21	2.75	5.13	6.21	6.36	5.98	4.98	3.82	2.74
	开路误差/%	5.45	6.68	15.08	20.71	24.10	25.56	25.33	23.54	20.45	16.56	12.06	7.66	3.83
6	有限元/Hz	158793	146882	131735	115583	99537	84429	70872	59146	49430	41762	35690	31123	27819
	短路频率/Hz	258551	205769	163943	130846	104712	84144	68040	55526	45907	38625	33218	29298	26528
	开路频率/Hz	186616	148846	118998	95479	77029	62653	51559	43114	36802	32189	28902	26620	25073
	短路误差/%	62.82	40.09	24.45	13.21	5.20	0.34	4.00	6.12	7.13	7.51	6.93	5.87	4.64
	开路误差/%	17.52	1.34	9.67	17.39	22.61	25.79	27.25	27.11	25.55	22.92	19.02	14.47	9.87

Sci. Ed.) **46** 30 (in Chinese) [滕舵, 王虁, 解柯柯 2018 陕西师范大学学报 (自然科学版) **46** 30]

[3] Zhou L S, Xu X R 2021 *Acta Acust.* **46** 1250 (in Chinese) [周利生, 许欣然 2021 声学学报 **46** 1250]

[4] Zhang H L 2018 *M. S. Thesis* (Harbin: Harbin Engineering University) (in Chinese) [张鸿磊 2018 硕士学位论文 (哈尔滨: 哈尔滨工程大学)]

[5] Chai Y, Mo X P, Liu Y P, Pan Y Z, Zhang Y Q 2017 *Acta Acust.* **42** 619 (in Chinese) [柴勇, 莫喜平, 刘永平, 潘耀宗, 张运强, 李鹏 2017 声学学报 **42** 619]

[6] Song Z, Yan Y R 2018 *J. Unmanned Underw. Systems* **26** 498 (in Chinese) [宋哲, 严由嵘 2018 水下无人系统学报 **26** 498]

[7] Lin S Y 2023 *Acta Acust.* **28** 102 (in Chinese) [林书玉 2023 声学学报 **28** 102]

[8] Mu Y R 1979 *Acta Acust.* **3** 161 (in Chinese) [穆廷荣 1979 声学学报 **3** 161]

[9] Been K, Nam S, Lee H, Seo H seon, Moon W 2017 *J. Acoust. Soc. Am.* **141** 4740

[10] Lee J, Been K, Moon W 2023 *J. Acoust. Soc. Am.* **154** A228

[11] Rogers P H 2005 *J. Acoust. Soc. Am.* **77** S16

[12] Butler J L 1976 *J. Acoust. Soc. Am.* **59** 480

[13] Sherman C H, Parke N G 2005 *J. Acoust. Soc. Am.* **38** 715

[14] Huang C H, Ma C C, Lin Y C 2005 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr.* **52** 1204

[15] Aronov B S 2013 *J. Acoust. Soc. Am.* **134** 1021

[16] Hu J L 2023 *Ph. D. Dissertation* (Harbin: Harbin Engineering University) (in Chinese) [胡久龄 2023 博士学位论文 (哈尔滨: 哈尔滨工程大学)]

[17] Teng D 2016 *Fundamentals of Hydroacoustic Transducers* (Northwestern Polytechnical University Press) p233 (in Chinese) [滕舵 2016 水声换能器基础 第 233 页]

[18] Timošenko S P, Woinowsky-Krieger S 1996 *Theory of Plates and Shells* (New York: McGraw-Hill) p580

[19] Cao Z Y 1989 *Plate and Shell Vibration Theory* (Beijing: China Railway Press) p462 (in Chinese) [曹志远 1989 板壳振动理论 (北京: 中国铁道出版社) 第 462 页]

[20] Luan G D 2005 *Piezoelectric Transducers and Transducer Arrays* (Beijing: Peking University Press) p479 (in Chinese) [栾桂冬 2005 压电换能器和换能器阵 (北京: 北京大学出版社) 第 479 页]

[21] Pan R, Chai Y, Mo X P, Liu W Z, Zhang X Z 2024 *Appl. Acoust.* **43** 719 (in Chinese) [潘瑞, 柴勇, 莫喜平, 刘文钊, 张秀侦 2024 应用声学 **43** 719]

[22] Zhang H L 2012 *Theoretical Acoustics* (Beijing: Higher Education Press) p139 (in Chinese) [张海澜 2012 理论声学 (北京: 高等教育出版社) 第 139 页

[23] Dan Y, Xu L, Zhou G P 2022 *Piezoelectr. Acoustoopt.* **44** 316 (in Chinese) [单影, 许龙, 周光平 2022 压电与声光 **44** 316]

Study of radial bending vibration and excitation of piezoelectric rings*

Pan Rui [1)2)] Mo Xi-Ping [1)†] Chai Yong [1)‡]
Zhang Xiu-Zhen [1)2)] Tian Zhi-Feng [1)]

1) (*Laboratory of Ocean Acoustic Technology, Institute of Acoustics, Chinses Academy of Sciences, Beijing* 100190, *China*)

2) (*School of Physical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

(Received 27 June 2024; revised manuscript received 3 August 2024)

Abstract

Piezoelectric ring transducer is one of the most common underwater transducers, and its radial vibration, bending vibration in-plane r-θ and out-of-plane r-θ have been widely studied. However, the current research on the bending vibration in the plane r-z of the ring is insufficient, although it may have a noticeable influence on the applicability of the underwater transducers. In this study, mechanical analysis and related mathematical calculations of the bending vibrations in the plane r-z are carried out by using the thin-shell theory. Herein, the following three aspects are studied: 1) free vibration theory solution, 2) forced vibration: multi-order modal excitation theory, and 3) related finite element calculations and experimental verification. In this study, the bending vibration equations under electrical short and electric open condition are derived, and the multi-order resonance frequency prediction formulas and shape functions for both conditions are obtained by analytical solution and function fitting. Using the finite element method, the influence of piezoelectric effect and the range of applicability of these two electrical conditions are analyzed. The non-homogeneous equations under forced vibration are solved. By utilizing the orthogonal completeness of the vibration mode function, an integral transformation with the vibration mode function can be defined as the basis vector, so that the equation is solved in a simple positive space, and the results reveal the relationship between the coefficients of the modes of different orders and the voltage distribution. By modal theory, the effects of electrical excitation conditions on the multistep bending vibration modes are investigated, and effective methods such as unimodal excitation, partial excitation and single-ended excitation acting on several different target modes are obtained. The proposed piezoelectric ring unimodal excitation and single-ended excitation methods successfully excite the target modes in the experiments: the unimodal excited ring excites only one of its corresponding bending modes, while the single-ended excitation method excites all the bending modes of the first five orders, and its modal strength characteristics are in accordance with the theoretical predictions. This study involves finite element simulation, experimental and theoretical comparative verification, which are in good agreement. The relevant conclusions can provide a theoretical basis for identifying the vibration modes of piezoelectric ring and the fine tuning of modal excitation.

Keywords: piezoelectric ring transducer, bending vibration, thin shell theory, modal excitation

PACS: 43.38.+n, 43.30.+m, 43.40.+s **DOI:** 10.7498/aps.73.20240887

CSTR：32037.14.aps.73.20240887

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 62127801).

† Corresponding author. E-mail: moxp@mail.ioa.ac.cn

‡ Corresponding author. E-mail: chaiyong@mail.ioa.ac.cn

物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

压电圆环径向弯曲振动与激励研究

潘瑞 莫喜平 柴勇 张秀侦 田芝凤

Study of radial bending vibration and excitation of piezoelectric rings

Pan Rui Mo Xi-Ping Chai Yong Zhang Xiu-Zhen Tian Zhi-Feng

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 73, 194301 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20240887
在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.73.20240887
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn