

关联退相位有色噪声通道下熵不确定关系的调控*

余敏^{1)†} 郭有能²⁾

1) (湖南文理学院数理学院, 光电信息集成与光学制造技术湖南省重点实验室, 常德 415000)

2) (长沙学院电子信息与电气工程学院, 长沙 410022)

(2024 年 8 月 23 日收到; 2024 年 9 月 21 日收到修改稿)

不确定性原理限制了观察者对两个不相容可观测量的精确测量能力, 在量子信息科学领域的量子精密测量中扮演着重要角色. 本文研究关联退相位有色噪声通道下两量子比特系统的量子存储支撑熵不确定关系, 结合通道连续使用间的关联性和动力学演化中的非马尔科夫性调控熵不确定度及其下限. 分别选取最大纠缠态和可分离态作为系统的初态, 通过调节关联强度和非马尔科夫性发现: 完全关联通道可以最大程度地抑制退相干, 降低熵不确定度及其下限, 此时非马尔科夫效应不发挥作用; 部分关联通道与非马尔科夫效应结合可以在演化中某些时刻更有效地降低熵不确定度及其下限; 长时间演化后, 系统的熵不确定度及下限达到稳定值, 且稳定值只与通道的关联强度有关, 通道的关联性越强, 稳态的熵不确定度及下限越低. 最后分析熵不确定性及其下限降低的物理本质, 发现熵不确定度及其下限的降低源于系统量子关联的增加.

关键词: 不确定关系, 关联通道, 非马尔科夫性, 量子关联**PACS:** 03.65.Yz, 03.67.-a**DOI:** 10.7498/aps.73.20241171**CSTR:** 32037.14.aps.73.20241171

1 引言

不确定性原理是量子力学与经典力学的显著区别之一. 1927 年 Heisenberg^[1] 首次提出了位置与动量的不确定关系, Robertson^[2] 将其推广到了任意两个不相容的可观测量. 随着量子信息科学的不断发展, 利用信息熵度量不确定关系的方法逐渐兴起. Deutsch^[3] 首先提出了利用香农熵表示的不确定关系, Kraus^[4], Maassen 和 Uffink^[5] 对其进行了改进. 随后, Berta 等^[6] 提出了利用冯·诺依曼熵表示的量子存储支撑熵不确定关系, 并指出利用量子存储比特与粒子间的纠缠可以降低对测量结果的不确定性. 量子存储支撑熵不确定关系在纠缠见证^[7-9]、量子计量学^[10]、量子密钥分配^[11-13]、量子密码学^[14,15] 等领域有着广泛的应用. 近年来, 各种量

子系统中量子存储支撑熵不确定关系的动力学演化特性得到了大量关注^[16-27].

另一方面, 任何物理过程都可以理解为一个将系统初态映射到末态的量子通道, 量子通道的记忆效应在开放量子系统的动力学演化中起着重要作用. 量子通道的记忆效应来源于两方面: 一是从量子信息理论来看, 量子通道的连续使用间存在关联性. 自 Macchiavello 和 Palma^[28] 提出量子通道的连续使用间存在关联性以来, 人们对关联量子通道的研究主要集中在关联通道的量子容量问题^[29-31]以及关联通道对量子效应的调控作用. 大量的研究表明: 关联量子通道可保护纠缠与量子关联^[32-34]、提高量子相干性^[35-37]、加速量子系统演化^[38-41]等. 二是从开放量子系统理论来看, 通道的记忆效应来源于环境与系统间信息的交换, 称为非马尔科夫性^[42,43]. 通道的非马尔科夫效应允许了信息的

* 湖南省自然科学基金 (批准号: 2021JJ30757) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hsdymun@163.com

回流, 从而对量子信息处理过程中的退相干效应具有一定的抑制作用. 在开放量子系统理论中, 非马尔科夫效应在量子生物学^[44]、量子控制^[45]、量子博弈^[46]等方面有着重要应用. 最初人们对量子通道记忆效应的研究仅限于通道关联性和非马尔科夫性中的一种. 近年来, 研究者们开始讨论通道关联性与非马尔科夫性之间的关系^[47]与联合作用^[48].

由于量子系统会不可避免地与周围环境发生相互作用, 使得系统发生退相干, 所以系统的熵不确定性也会随之升高. 量子信息处理过程中, 熵不确定性的有效调控成为要解决的关键问题. 各种噪声通道对量子存储支撑熵不确定关系的影响以及利用各种方法来降低熵不确定性的研究激发了研究者们兴趣. 这些研究中不乏利用通道记忆效应来调控熵不确定关系的方法^[49-51]. 但这些研究都只单独考虑了通道的关联性或非马尔科夫性, 关联性与非马尔科夫性的联合作用尚未涉及. 本文旨在利用通道关联性与非马尔科夫性的联合作用对量子存储支撑熵不确定关系进行调控. 考虑一个通过关联退相位有色噪声通道的两量子比特系统, 通过调节通道的关联强度和非马尔科夫性探究熵不确定关系在关联非马尔科夫通道下的演化特性, 致力于找到噪声通道下降低熵不确定性的有效方法, 获得更精确的测量结果.

2 量子存储支撑熵不确定关系

Berta 等^[6]提出的量子存储支撑熵不确定关系可以通过不确定游戏来理解. 不确定游戏由两个游戏玩家 Alice 和 Bob 共同完成, 首先 Bob 制备一个两量子比特系统 AB , 他将量子比特 B 留下作为量子存储器, 将量子比特 A 发送给 Alice, Alice 随机选择不相容的可观测量 Q 或 R 对量子比特 A 进行测量, 并且把测量选择告诉 Bob, Bob 的任务是预测 Alice 的测量结果. 量子存储支撑熵不确定关系可以度量 Bob 对 Alice 测量结果的不确定性及其下限. 其表达式如下:

$$S(Q|B) + S(R|B) \geq \log_2 \frac{1}{c} + S(A|B), \quad (1)$$

其中, $c = \max_{k,l} |\langle \psi_k^Q | \psi_l^R \rangle|^2$ 度量可观测量 Q 和 R 之间的互补性, 且 ψ_k^X 表示 $X \in \{Q, R\}$ 的本征态. $S(A|B) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)$ 是 ρ_{AB} 的条件冯·诺依曼熵. $S(X|B)$ 是经过 X 测量后态 $\rho_{XB} =$

$\sum_k (|\psi_k^X\rangle\langle\psi_k^X| \otimes I) \rho_{AB} (|\psi_k^X\rangle\langle\psi_k^X| \otimes I)$ 的条件冯·诺依曼熵, 它代表 Bob 关于 Alice 对可观测量 X 的测量结果的不确定性. (1) 式的左边称为熵不确定度, 用 U 来表示; 右边称为熵不确定度的下限, 用 U_b 来表示. 如果在此游戏中, 两量子比特间存在纠缠, 那么 Bob 预测 Alice 的测量结果精度将被提高. 特别是当两量子比特系统处于最大纠缠态时, Bob 可以精准地预测 Alice 对 Q 和 R 的测量结果.

3 关联退相位有色噪声通道及物理模型

量子通道可分为关联通道与非关联通道, 如果通道的关联时间远小于先后通过它的量子比特时间间隔, 那么通道的连续使用之间没有相关性, 这样的通道称为非关联通道. 反之, 称为关联通道. 量子通道代表一个完全正定保迹的映射, 考虑由 n 个量子比特组成的系统, 系统的一个初态 ρ_0 经过通道后, 映射为

$$\rho(t) = \sum_{i_1 \dots i_n} E_{i_1 \dots i_n} \rho_0 E_{i_1 \dots i_n}^\dagger, \quad (2)$$

其中, $E_{i_1 \dots i_n}$ 为 Kraus 算子, 定义如下:

$$E_{i_1 \dots i_n} = \sqrt{p_{i_1 \dots i_n}} A_{i_1} \otimes \dots \otimes A_{i_n}, \quad \sum p_{i_1 \dots i_n} = 1, \quad (3)$$

其中, p_{ij} 是随机操作序列作用于 n 个量子比特系统上的概率. 当只考虑两量子比特系统时, 作用于两量子比特系统的非关联通道的 Kraus 算子表示为

$$E_{ij} = \sqrt{p_{ij}} A_i \otimes A_j, \quad (4)$$

其中, $p_{ij} = p_i p_j$, 即通道的 Kraus 算子相互独立. 对于关联的两量子比特通道, 其 Kraus 算子更加复杂, 可以表示为^[29]

$$E'_{ij} = \sqrt{p_i [(1-\eta)p_j + \eta\delta_{ij}]} A_i \otimes A_j, \quad (5)$$

其中, $\eta \in [0, 1]$ 表示通道的关联强度, 利用算子和表示方法, 经过通道后系统的末态为

$$\rho(t) = (1-\eta) \sum_{i,j} E_{ij} \rho_0 E_{ij}^\dagger + \eta \sum_k E_{kk} \rho_0 E_{kk}^\dagger. \quad (6)$$

这里, $\eta = 0$ 代表系统通过非关联通道, 而 $\eta = 1$ 代表系统通过完全关联通道.

模拟量子算法中的非马尔科夫噪声对实现系统的鲁棒性优化至关重要, 退相位有色噪声 (或称为随机电报噪声) 便是其中一种典型的非马尔科

夫噪声, 可以由单量子比特系统与随机电报信号噪声环境的相互作用来描述. 此系统的动力学由以下含时哈密顿量表示:

$$H(t) = \sum_{k=1}^3 \Gamma_k \sigma_k, \quad (7)$$

其中, σ_k 代表 (x, y, z) 三个方向的泡利算符; Γ_k 是服从随机电报信号统计的随机变量, 且 $\Gamma_k = \alpha_k n_k(t)$, $n_k(t)$ 具有泊松分布, 它的平均值等于 $t/2\nu$, α_k 是随机变量, 可以随机取值 $\pm\alpha_k$. 当 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, 且 $\alpha_3 = \alpha$ 时, 此模型正是一个退相位有色噪声模型. 单量子比特的退相位有色噪声通道可以用以下 Kraus 算子表示:

$$E_0 = \sqrt{p_0} \sigma_0, \quad E_3 = \sqrt{p_3} \sigma_3, \quad (8)$$

其中, $\sigma_0 = \mathbf{I}$ 表示单位矩阵, $p_0 = 1 - Z_t$, $p_3 = Z_t$, $Z_t = \frac{1 - \Lambda(t)}{2}$. 当 $\nu \geq 1/4$ 时, $\Lambda(t) = e^{-t/2\nu} [\cos(\mu t/2\nu) + \sin(\mu t/2\nu)/\mu]$, $\mu = \sqrt{[(4\nu)^2 - 1]}$, 噪声通道具有非马尔科夫性. 而当 $\nu < 1/4$ 时, $\Lambda(t)$ 具有相同形式, 但其中 $\cos(\cdot)$ 和 $\sin(\cdot)$ 分别替换为 $\cosh(\cdot)$ 和 $\sinh(\cdot)$, 噪声通道具有马尔科夫性^[52,53].

本文考虑两个量子比特连续地通过退相位有色噪声通道, 如果不考虑通道的关联效应, Kraus 算子表示为

$$E_{ij} = \sqrt{p_i p_j} \sigma_i \otimes \sigma_j, \quad i, j \in \{0, 3\}. \quad (9)$$

当通道的连续使用间存在相关性时, 通道间的关联效应必须加以考虑. 此时, Kraus 算子 E_{kk} 的表达形式如下:

$$E_{kk} = \sqrt{p_k} \sigma_k \otimes \sigma_k, \quad k \in \{0, 3\}. \quad (10)$$

本文主要研究经过关联退相位有色噪声通道的两量子比特系统 AB 的熵不确定度及其下限. 设两量子比特系统初始处于 Bell 对角态:

$$\rho_{AB}(0) = \frac{1}{4} \left(\mathbf{I}^A \otimes \mathbf{I}^B + \sum_{j=1,2,3} C_j \sigma_j^A \otimes \sigma_j^B \right), \quad (11)$$

其中系数 $C_j = \text{Tr}_{AB}(\rho_{AB}(0) \sigma_j^A \otimes \sigma_j^B)$ 满足关系 $0 \leq |C_j| \leq 1$. 利用 (6) 式, (9) 式和 (10) 式, 可得任意时刻系统的密度矩阵 $\rho^{AB}(t)$, 其非零矩阵元为

$$\rho_{11}^{AB}(t) = \frac{1 + C_3}{4}, \quad \rho_{22}^{AB}(t) = \frac{1 - C_3}{4},$$

$$\rho_{33}^{AB}(t) = \frac{1 - C_3}{4}, \quad \rho_{44}^{AB}(t) = \frac{1 + C_3}{4},$$

$$\rho_{14}^{AB}(t) = \frac{1}{4} (C_1 - C_2) [(1 - 2Z_t)^2 (1 - \eta) + \eta],$$

$$\rho_{23}^{AB}(t) = \frac{1}{4} (C_1 + C_2) [(1 - 2Z_t)^2 (1 - \eta) + \eta], \quad (12)$$

$$\text{且 } \rho_{ij}^{AB}(t) = (\rho_{ji}^{AB}(t))^*.$$

本文所选可观测量为 $Q = \sigma_1$, $R = \sigma_3$, 利用 (1) 式和 (12) 式, 可以得到熵不确定度 U 及其下限 U_b 的解析式:

$$U = \sum_{k=1}^2 \left[-\frac{1 + (-1)^k C_1(t)}{2} \log_2 \frac{1 + (-1)^k C_1(t)}{2} - \frac{1 + (-1)^k C_3(t)}{2} \log_2 \frac{1 + (-1)^k C_3(t)}{2} \right],$$

$$U_b = \sum_{k=1}^4 -\frac{\lambda_k}{4} \log_2 \frac{\lambda_k}{4}, \quad (13)$$

其中, $C_{1,2}(t) = C_{1,2}[1 - 4Z_t(1 - \eta) + 4Z_t^2(1 - \eta)]$, $C_3(t) = C_3$, 且 $\lambda_1 = 1 - C_1(t) - C_2(t) - C_3(t)$, $\lambda_2 = 1 + C_1(t) + C_2(t) - C_3(t)$, $\lambda_3 = 1 + C_1(t) - C_2(t) + C_3(t)$, $\lambda_4 = 1 - C_1(t) + C_2(t) + C_3(t)$.

4 熵不确定度及其下限的动力学

接下来研究关联退相位有色噪声通道对熵不确定度 U 及其下限 U_b 的调控作用. 在此之前, 先利用迹距离 (TD)^[54] 的演化特性来判别关联退相位有色噪声通道的马尔科夫性与非马尔科夫性^[55,56]. TD 可以用来度量任意两量子态 $\rho_1(t)$ 与 $\rho_2(t)$ 的可区别性, 其定义为

$$D(\rho_1(t), \rho_2(t)) = \frac{1}{2} \text{Tr} |\rho_1(t) - \rho_2(t)|, \quad (14)$$

其中 $|A| = \sqrt{A^\dagger A}$. 如果 TD 在整个动力学演化中单调递减, 即 $dD(t)/dt < 0$, 表明信息只能单向地由系统流向环境, 称为马尔科夫过程; 而 $dD(t)/dt > 0$ 意味着存在信息从环境回流到系统的情况, 从而产生非马尔科夫过程. 基于以上判别标准, 系统的非马尔科夫度可以定义为

$$N = \max_{[dD(t)/dt] > 0} \int \frac{dD(t)}{dt} dt, \quad (15)$$

其中对所有可能的初态对 $\rho_1(0), \rho_2(0)$ 取最大值. Addis 等^[47] 通过大量数据抽样找到了关联退相位

有色噪声通道模型的最优初态对为 $\rho_1(0) = |++\rangle\langle++|$, $\rho_2(0) = |--\rangle\langle--|$ ($|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$). 利用 (6) 式, (9) 式, (10) 式和 (14) 式不难得到, 最优初态对经过通道后的 TD 为 $|\Lambda(t)|$, 其与通道的关联强度 η 无关.

图 1 展现了通道参数 $\nu = 0.1$ 和 10 时, TD 关于时间的演化图像. 从图中可以看出, 当 $\nu = 0.1$ 时, TD 随着时间的演化单调递减, 说明此时信息由系统单向地流向噪声通道, 通道此时具有马尔科夫性. 而当 $\nu = 10$ 时, TD 在时间演化过程中衰减后出现了回复现象, 呈现振荡行为, 这标志着信息流入噪声通道后有一部分回流到了系统, 此时通道具有非马尔科夫性.

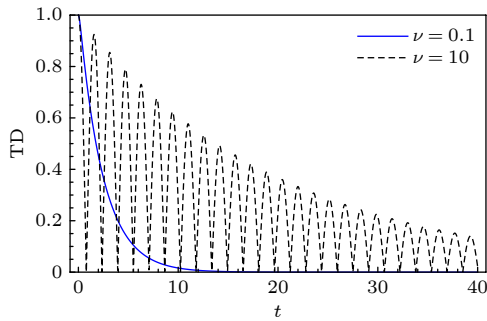


图 1 迹距离 TD 随时间的演化

Fig. 1. Evolution of the trace distance TD.

下面探究熵不确定度 U 及其下限 U_b 分别在关联的马尔科夫通道和非马尔科夫通道下的动力学演化特性, 讨论通道的关联性与非马尔科夫性对 U 和 U_b 的影响, 通过合理调控通道相关参数, 尽可能地降低系统熵不确定度及其下限, 并探寻其物理机制.

4.1 最大纠缠初态

首先研究两量子比特系统初始处于最大纠缠态的情况, 初态参数取为 $(C_1, C_2, C_3) = (1, -1, 1)$, 熵不确定度及其下限的动力学演化图像如图 2 和图 3 所示. 由于所取初态满足条件 $C_2 = -C_1 C_3$, 且退相位有色噪声通道属于单位 (unital) 通道 [57], 所以熵不确定度总是能达到它的下限, 即 $U = U_b$.

图 2 表示系统初始处于最大纠缠态时, 熵不确定度及其下限在不同关联强度马尔科夫通道下的时间演化图像. 从图中可以看出, 由于通道的退相干性, 系统的熵不确定度及其下限随着时间推移会逐渐上升, 最终达到某个稳定值. 而通道的关联强

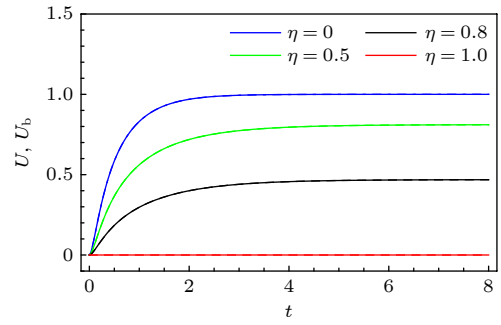


图 2 初态为最大纠缠态时, 熵不确定度 U 及其下限 U_b 随时间的演化. 通道参数 $\nu = 0.1$, 呈现马尔科夫性

Fig. 2. Evolution of uncertainty U and its lower bound U_b of the system which is initially in a maximally entangled state. The channel is Markovian, where $\nu = 0.1$.

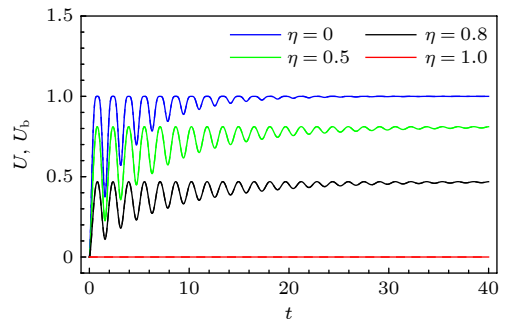


图 3 初态为最大纠缠态时, 熵不确定度 U 及其下限 U_b 随时间的演化. 通道参数 $\nu = 10$, 呈现非马尔科夫性

Fig. 3. Evolution of uncertainty U and its lower bound U_b of the system which is initially in a maximally entangled state. The channel is non-Markovian, where $\nu = 10$.

度越大, 熵不确定度及其下限的值越小, 特别是当通道完全关联 $\eta = 1$ 时, 系统的熵不确定度及其下限一直保持在初始的零值. 这些结果表明: 通道的关联性可以有效地抑制它的退相干; 完全关联的退相位有色噪声通道能最大程度地抑制退相干, 此时初始的最大纠缠态 $(C_1, C_2, C_3) = (1, -1, 1)$ 为系统的暗态, 从而 Bob 能保持对测量结果的精准预测. 通道具有关联性可以理解为通道对其本身的历史具有记忆效应, 其中包括前一个量子比特与其相互作用的一些信息. 因此, 这种记忆效应可能会改变它对后续量子比特的作用方式, 从而对系统的相干性产生一定影响. 但值得注意的是, 通道的关联性并不一定总是会抑制退相干. 通道关联性对系统相干性的作用效果不仅与通道类型有关, 还与系统初态有关 [58–60].

图 3 表示系统初始处于最大纠缠态时, 熵不确定度及其下限在不同关联强度非马尔科夫通道下的

时间演化图像. 与图 2 一致, 通道的关联性有效地降低了熵不确定度及其下限. 由于此时通道参数 $\nu = 10$, 所以通道的非马尔科夫性也对熵不确定度及其下限的演化产生了影响. 从图 3 可以看出, 当通道非关联或部分关联 ($0 \leq \eta < 1$) 时, 通道的非马尔科夫性使熵不确定度及其下限在演化过程中出现了振荡现象. 与马尔科夫通道 (图 2) 不同, 此时熵不确定度及其下限增大后出现一个降低的过程, 这是由于通道的非马尔科夫性引起了系统信息的回流, 从而抑制了退相干. 但当通道完全关联时, 可以发现通道的非马尔科夫效应没有发挥作用, 而是通道的关联性最大程度地抑制了退相干 (与图 2 一致). 从而可以得到以下结论: 完全关联的退相位有色噪声通道能最大程度地抑制退相干; 退相位有色噪声通道的部分关联性与非马尔科夫性的联合作用能更有效地抑制退相干, 其中通道关联性引起熵不确定度及其下限的整体降低, 而非马尔科夫性引起熵不确定度及其下限的振荡, 在某些时刻得到进一步降低.

从图 3 还可以看出, 长时间的演化后, 非马尔科夫通道下系统的熵不确定度及其下限也将达到稳定值. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 可以得到系统的稳态, 稳态的熵不确定度及其下限的表达式为

$$U(t \rightarrow \infty) = U_b(t \rightarrow \infty) = -\frac{1-\eta}{2} \log_2 \frac{1-\eta}{2} - \frac{1+\eta}{2} \log_2 \frac{1+\eta}{2}. \quad (16)$$

从 (16) 式不难发现, 稳态的熵不确定度及其下限只与通道的关联强度 η 有关, 且通道的关联性越强, 稳态的熵不确定度及其下限越低. 换言之, 在相同的关联强度下, 无论通道是马尔科夫性还是非马尔科夫性的, 长时间演化后都将达到相同的稳定值.

4.2 可分离初态

本节研究两量子比特系统初始处于可分离态的情况, 初态参数取为 $(C_1, C_2, C_3) = (0.2, -0.3, 0.5)$, 熵不确定度及其下限的动力演化图像如图 4 和图 5 所示.

通过与最大纠缠初态的情况对比, 可以发现, 由于 $C_2 \neq -C_1 C_3$, 此时熵不确定度与其下限不再保持相等. 但与图 2 和图 3 结果一致的是, 通道的关联性与非马尔科夫性同样抑制了退相干, 降低了熵不确定度及其下限. 当通道非关联 ($\eta = 0$) 时,

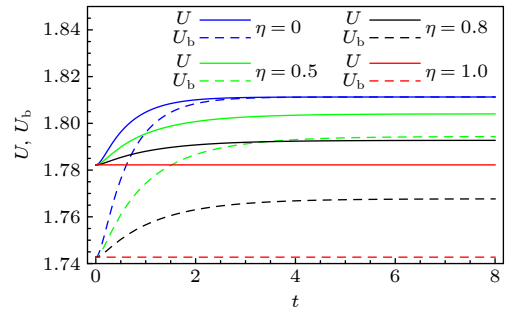


图 4 初态为可分离态时熵不确定度 U 及其下限 U_b 随时间的演化. 通道参数 $\nu = 0.1$, 呈现马尔科夫性

Fig. 4. Evolution of uncertainty U and its lower bound U_b of the system which is initially in a separated state. The channel is Markovian, where $\nu = 0.1$.

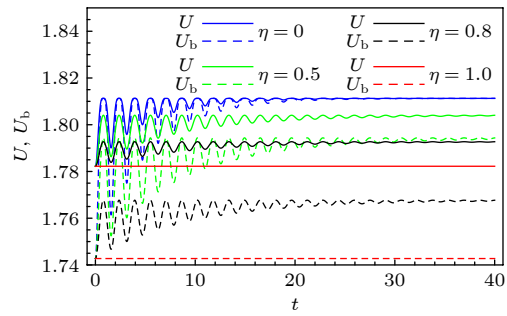


图 5 初态为可分离态时, 熵不确定度 U 及其下限 U_b 随时间的演化. 通道参数 $\nu = 10$, 呈现非马尔科夫性

Fig. 5. Evolution of uncertainty U and its lower bound U_b of the system which is initially in a separated state. The channel is non-Markovian, where $\nu = 10$.

熵不确定度在演化中的某些时刻可以达到它的下限, 不难验证在这些时刻系统参数总是满足 $C_2(t) = -C_1(t)C_3(t)$. 此外, 从图 4 和图 5 还可以发现, 与最大纠缠初态类似, 长时间演化后, 熵不确定度及其下限将保持在某个稳定值, 且此稳定值只与通道的关联强度有关, 通道的关联性越强, 稳态的熵不确定度及其下限越低, 此处不再赘述.

4.3 物理解释与讨论

上述研究表明通道的关联性与非马尔科夫性可以抑制系统的退相干, 从而降低熵不确定度及其下限. 系统的纠缠可以利用共生纠缠度^[61] $E(\rho_{AB}) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}$ 度量, 其中 λ_i 是 $\rho_{AB}(\sigma_2 \otimes \sigma_2)\rho_{AB}^*(\sigma_2 \otimes \sigma_2)$ 的降序排列本征值. 当系统初始处于最大纠缠态 $(C_1, C_2, C_3) = (1, -1, 1)$ 时, 系统的共生纠缠度为 $\Lambda^2(t)(1-\eta) + \eta$. 通过研究纠缠的动力学演化不难发现, 纠缠的演化趋势正

好与熵不确定度及其下限的演化相反. 即系统的纠缠越大, 熵不确定度及其下限越低. 这是因为量子比特 B 通过与量子比特 A 的纠缠提供了关于 A 的测量结果信息. 而对于可分离初态 $(C_1, C_2, C_3) = (0.2, -0.3, 0.5)$, 系统的共生纠缠度为 $\max\{0, -0.75 + 0.05[\Lambda^2(t)(1 - \eta) + \eta], -0.25 + 0.25[\Lambda^2(t)(1 - \eta) + \eta]\}$. 由于 $\Lambda^2(t) \in [0, 1]$ 且 $\eta \in [0, 1]$, 所以

$$-0.75 + 0.05[\Lambda^2(t)(1 - \eta) + \eta] < 0,$$

$$-0.25 + 0.25[\Lambda^2(t)(1 - \eta) + \eta] \leq 0,$$

即此时系统的纠缠在演化过程中一直为零. 也就是说, 可分离初态情况中熵不确定度及其下限的降低 (图 4 和图 5) 并不是源于系统纠缠的增加. 众所周知, 量子纠缠无法度量量子系统所有的量子关联, 所以接下来将利用量子失协 [62] 更全面地度量系统的量子关联.

系统的量子失协定义为系统总关联与经典关联的差值:

$$Q(\rho_{AB}) = I(\rho_{AB}) - C(\rho_{AB}), \quad (17)$$

其中 $I_{AB} = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$ 是子系统 A 和 B 之间的互信息, 代表系统的总关联. $C(\rho_{AB}) = S(\rho_B) - \min_{E_k^A} S(B|\{E_k^A\})$ 代表系统的经典关联, 并且 $S(B|\{E_k^A\}) = \sum_k p_k S(\rho_{B|k})$ 是对子系统 A 进行 POVM 测量后非选择测量态 $\rho_{B|k} = \text{Tr}_A(E_k^A \rho_{AB})/p_k$, $p_k = \text{Tr}(E_k^A \rho_{AB})$ 的平均条件冯·诺依曼熵.

图 6 表示系统初始处于可分离态 $(C_1, C_2, C_3) = (0.2, -0.3, 0.5)$ 时, 系统的量子失协 (量子关联 $Q(\rho_{AB})$) 关于时间的演化图像. 图 6(a) 与图 6(b) 分别表示马尔科夫通道与非马尔科夫通道的情况, 从图中可以看出, 由于通道的退相干性, 系统的量子关联会随着时间的演化而衰减. 通道的关联性越强, 系统的量子关联衰减越慢. 对比图 6(a) 和图 6(b) 可以发现, 通道的非马尔科夫性相对于马尔科夫性在某些时刻可以提高系统的量子关联. 总体来看, 系统量子关联的演化正好与熵不确定度及其下限的演化 (图 4 和图 5) 相反, 即通道关联性与非马尔科夫性作用下系统量子关联的增加降低了熵不确定度及其下限.

仔细观察 (1) 式会发现, 量子存储支撑熵不确定关系可以改写为

$$S(Q|B) + S(R|B) \geq \log_2(1/c) + S(\rho_A) - I_{AB}, \quad (18)$$

对于本文所选的 Bell 对角初态, 在演化过程中, $\rho_A \equiv \mathbf{I}/2$, 即 $S(\rho_A) \equiv 1$. 且选择完全互补的可观测量 σ_1 和 σ_3 时, $\log_2 1/c \equiv 1$. 由此可见, 此时系统熵不确定度下限 (与熵不确定度演化同步) 的演化只与系统的总关联 I_{AB} 有关. 而本文所选系统初态参数满足 $|C_3| \geq |C_1|, |C_2|$, 经典关联的解析式为

$$C(\rho_{AB}) = \frac{1 - C_3}{2} \log_2(1 - C_3) + \frac{1 + C_3}{2} \log_2(1 + C_3). \quad (19)$$

从 (19) 式可以看出, 此时经典关联只与初态参数 C_3 有关 [63]. 也就是说, 此时系统的经典关联既不随时间演化, 也不受通道关联性与非马尔科夫性的影响, 保持恒定的初始值. 从而, 系统熵不确定度及其下限的演化只由量子关联的演化特性决定. 根据量子信息理论, 系统的量子关联可以衡量 Bob 利用量子存储比特 B 获取量子比特 A 的信息量. 所以当系统的量子关联增大时, Bob 获取了更多关于量子比特 A 的信息, 对测量结果预测的准确度随之提高, 表现为熵不确定度及其下限的降低. 需要指出的是, 此处得到的熵不确定关系与量子关联之间的负相关性依赖于本文所讨论的

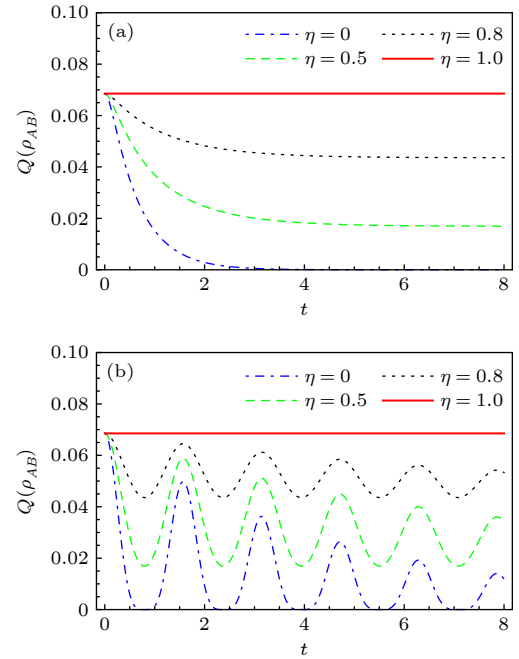


图 6 初态为可分离态时量子关联 $Q(\rho_{AB})$ 随时间的演化 (a) 通道参数 $\nu = 0.1$, 呈现马尔科夫性; (b) 通道参数 $\nu = 10$, 呈现非马尔科夫性

Fig. 6. Evolution of quantum correlations $Q(\rho_{AB})$ of the system which is initially in a separated state: (a) The channel is Markovian, where $\nu = 0.1$; (b) the channel is non-Markovian, where $\nu = 10$.

通道与初态. 一般情况下, 量子系统的熵不确定关系与量子关联和经典关联间存在着更复杂的关系. Pati 等^[64]证明了当量子关联大于经典关联时, 可以得到比 (1) 式更优化的下限. Hu 和 Fan^[65]考虑了量子态 ρ_{AB} 的纯化 $|\psi_{ABC}\rangle$, 发现量子关联与经典关联间的差异遵循单配性分配, 他们还通过研究三粒子系统的量子存储支撑熵不确定关系, 发现熵不确定度下限的变化由各方间各种关联的竞争决定^[66].

5 结 论

本文选取最大纠缠态和可分离态作为两量子比特系统的初态, 研究系统通过关联退相位有色噪声通道后熵不确定度及其下限的演化特性. 对比了关联的马尔科夫和非马尔科夫通道对熵不确定度及其下限的动力学影响. 研究结果表明: 当通道完全关联时, 无论通道具有马尔科夫性还是非马尔科夫性, 熵不确定度及其下限都得到了最大程度的降低, 这是因为通道的完全关联性最大程度地抑制了退相干. 而当通道部分关联时, 发现非马尔科夫性可引起熵不确定度及其下限的振荡行为, 在演化中的某些时刻相比于马尔科夫通道能更有效地降低熵不确定度及其下限. 通过研究系统长时间演化后稳态的熵不确定度及其下限, 发现稳态的熵不确定度及其下限完全由通道的关联强度来调控, 不受非马尔科夫性的影响. 为了理解系统熵不确定度及其下限降低的物理机制, 还研究了系统量子关联的动力学演化, 发现熵不确定度及其下限的降低正是源于所研究系统量子关联的增加. 总之, 本文联合通道的关联性与非马尔科夫性, 找到了降低熵不确定度及其下限的有效方法, 为量子信息处理过程中不确定关系的调控提供了一个可行的理论方案.

参考文献

- [1] Heisenberg W 1927 *Z. Phys.* **43** 172
- [2] Robertson H P 1929 *Phys. Rev.* **34** 163
- [3] Deutsch D 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 631
- [4] Kraus K 1987 *Phys. Rev. D* **35** 3070
- [5] Maassen H, Uffink J B M 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1103
- [6] Berta M, Christandl M, Colbeck R, Renes J M, Renner R 2010 *Nat. Phys.* **6** 659
- [7] Prevedel R, Hamel D R, Colbeck R, Fisher K, Resch K J 2011 *Nat. Phys.* **7** 757
- [8] Li C F, Xu J S, Xu X Y, Li K, Guo G C 2011 *Nat. Phys.* **7** 752
- [9] Shi J, Ding Z, Wu T, He J, Yu L, Sun W, Wang D, Ye L

- 2017 *Laser Phys. Lett.* **14** 125208
- [10] Hall M J W, Cerf N J 2012 *New J. Phys.* **14** 033040
- [11] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
- [12] Renes J M, Boileau J C 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 020402
- [13] Haseli S, Dolatkhah H, Rangani Jahromi H, Salimi S, Khorashad A S 2020 *Opt. Commun.* **461** 125287
- [14] Tomamichel M, Lim C C W, Gisin N, Renner R 2012 *Nat. Commun.* **3** 634
- [15] Ng N H Y, Berta M, Wehner S 2012 *Phys. Rev. A* **86** 042315
- [16] Ming F, Wang D, Shi W N, Huang A J, Du M M, Sun W Y, Ye L 2018 *Quantum Inf. Process.* **17** 267
- [17] Li L J, Ming F, Shi W N, Ye L, Wang D 2021 *Physica E* **133** 114802
- [18] Wang D, Ming F, Huang A J, Sun W Y, Shi J D, Ye L 2017 *Laser Phys. Lett.* **14** 055205
- [19] Wang D, Ming F, Song X K, Ye L, Chen J L 2020 *Eur. Phys. J. C* **80** 800
- [20] Li L J, Ming F, Song X K, Ye L, Wang D 2021 *Eur. Phys. J. C* **81** 72
- [21] Wang T Y, Wang D 2024 *Phys. Lett. B* **855** 138876
- [22] Wang T Y, Wang D 2024 *Phys. Lett. A* **499** 129364
- [23] Wu L, Ye L, Wang D 2022 *Phys. Rev. A* **106** 062219
- [24] Xie B F, Ming F, Wang D, Ye L, Chen J L 2021 *Phys. Rev. A* **104** 062204
- [25] Ming F, Wang D, Fan X G, Shi W N, Ye L, Chen J L 2020 *Phys. Rev. A* **102** 012206
- [26] Bouafia Z, Oumennana M, Mansour M, Ouchni F 2024 *Appl. Phys. B* **130** 94
- [27] Abdel-Wahab N H, Ibrahim T A S, Amin M E, Salah A 2024 *Eur. Phys. J. D* **78** 28
- [28] Macchiavello C, Palma G M 2002 *Phys. Rev. A* **65** 050301
- [29] D'Arrigo A, Benenti G, Falci G 2007 *New J. Phys.* **9** 310
- [30] D'Arrigo A, Benenti G, Falci G 2013 *Phys. Rev. A* **88** 042337
- [31] Sk R, Panigrahi P K 2024 *Phys. Rev. A* **109** 032425
- [32] Guo Y N, Fang M F, Wang G Y, Zeng K 2016 *Quantum Inf. Process.* **15** 5129
- [33] Peng Z Y, Wu F L, Li J, Xue H N, Liu S Y, Wang Z Y 2023 *Phys. Rev. A* **107** 022405
- [34] Yu M, Guo Y N 2024 *Int. J. Theor. Phys.* **63** 156
- [35] Xie Y X, Qin Z Y 2020 *Quantum Inf. Process.* **19** 375
- [36] Dong Y, Ji A L, Zhang G F 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 070303 (in Chinese) [董曜, 纪爱玲, 张国锋 2022 物理学报 **71** 070303]
- [37] Zhang D H, Wu F L, Peng Z Y, Wang L, Liu S Y 2023 *Quantum Inf. Process.* **22** 120
- [38] Xu K, Zhang G F, Liu W M 2019 *Phys. Rev. A* **100** 052305
- [39] Haseli S, Hadipour M 2022 *Int. J. Theor. Phys.* **61** 117
- [40] Awasthi N, Joshi D K, Sachdev S 2022 *Int. J. Theor. Phys.* **61** 123
- [41] Hou L, Zhang Y, Zhu Y 2023 *Int. J. Theor. Phys.* **62** 221
- [42] Lindblad G 1976 *Comm. Math. Phys.* **48** 119
- [43] Wolf M M, Eisert J, Cubitt T S, Cirac J I 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 150402
- [44] Lambert N, Chen Y N, Cheng Y C, Li C M, Chen G Y, Nori F 2013 *Nat. Phys.* **9** 10
- [45] Hwang B, Goan H S 2012 *Phys. Rev. A* **85** 032321
- [46] Banu H, Rao K R 2024 *Eur. Phys. J. Plus* **139** 436
- [47] Addis C, Karpat G, Macchiavello C, Maniscalco 2016 *Phys. Rev. A* **94** 032121
- [48] Awasthi N, Haseli S, Johri U C, Salimi S, Dolatkhah H 2020 *Quantum Inf. Process.* **19** 10
- [49] Wang G Y, Guo Y N, Zeng K 2019 *J. Mod. Opt.* **66** 367
- [50] Li L J, Ming F, Song X K, Ye L, Wang D 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 070302 (in Chinese) [李丽娟, 明飞, 宋学科, 叶柳, 王栋

- 2022 物理学报 **71** 070302]
- [51] Hajihoseinlou H, Ahansaz B 2024 *Laser Phys.* **34** 075202
- [52] Daffer S, Wodkiewicz K, Cresser J D, McIver J K 2004 *Phys. Rev. A* **70** 010304(R)
- [53] Cai X 2020 *Sci. Rep.* **10** 88
- [54] Breuer H P, Laine E M, Piilo J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 210401
- [55] Chen M N, Wang D, Ye L 2019 *Phys. Lett. A* **383** 977
- [56] Wang D, Huang A J, Hoehn R D, Ming F, Sun W Y, Shi J Dong, Ye L, Kais S 2017 *Sci. Rep.* **7** 1066
- [57] Xu Z Y, Yang W L, Feng M 2012 *Phys. Rev. A* **86** 012113
- [58] Hu M L, Zhou W 2019 *Laser Phys. Lett.* **16** 045201
- [59] Hu M L, Fan H 2020 *Sci. China-Phys. Mech. Astron.* **63** 230322
- [60] Hu M L, Zhang Y H, Fan H 2021 *Chin. Phys. B* **30** 030308
- [61] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [62] Ollivier H, Zurek W H 2001 *Phys. Rev. Lett.* **88** 017901
- [63] Mazzola L, Piilo J, Maniscalco S 2011 *Int. J. Quantum Inf.* **09** 981
- [64] Pati A K, Wilde M M, Devi A R U, Rajagopal A K, Sudha 2012 *Phys. Rev. A* **86** 042105
- [65] Hu M L, Fan H 2013 *Phys. Rev. A* **88** 014105
- [66] Hu M L, Fan H 2013 *Phys. Rev. A* **87** 022314

Regulation of entropic uncertainty relation in correlated channels with dephasing colored noise^{*}

Yu Min^{1)†} Guo You-Neng²⁾

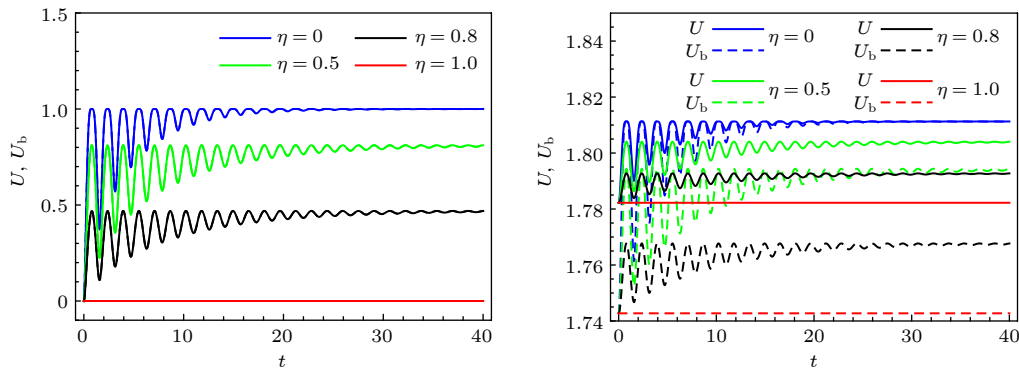
1) (Hunan Province Key Laboratory of Photoelectric Information Integration and Optical Manufacturing Technology, College of Mathematics and Physics Science, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China)

2) (School of Electronic Information and Electrical Engineering, Changsha University, Changsha 410022, China)

(Received 23 August 2024; revised manuscript received 21 September 2024)

Abstract

The uncertainty principle limits the ability for observer to precisely measure two incompatible observables, and plays a crucial role in quantum precision measurement in the quantum information science. When quantum systems interact with their surroundings, they inevitably result in decoherence, which increases the uncertainty of the system. In the process of quantum information processing, the effective regulation of uncertainty becomes a key problem that needs to be solved. In this work, we investigate the quantum-memory-assisted entropic uncertainty relation of a two-qubit system under correlated channels with dephasing colored noise. We demonstrate that it is possible to control the entropic uncertainty, U , and its lower bound, U_b , by combining correlations between successive uses of channels and the non-Markovianity of the dynamical evolution. Firstly, the evolutionary characteristics of the trace distance are employed to distinguish between Markovianity and non-Markovianity of the channel. Subsequently, the system is selected to be either a maximally entangled state



^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Human Province, China (Grant No. 2021JJ30757).

[†] Corresponding author. E-mail: hsdyumin@163.com

or separated state initially. By adjusting the strength η of the correlations, we find that with the increase of η , the entropic uncertainty and its lower bound decrease. Especially, if the channel is fully correlated ($\eta = 1$), the entropic uncertainty and its lower bound remain constant under the channel, indicating that decoherence is completely suppressed. A comparison of Markovian channel with non-Markovian channel reveals that the entropic uncertainty and its lower bound exhibit oscillatory behaviour under non-Markovian channels. The combination of correlations and non-Markovianity of the channel demonstrates that the entropic uncertainty and its lower bound can be reduced under fully correlated channels where the non-Markovianity has no effect. This is because fully correlated channels suppress decoherence to a greatest extent. Under partially correlated channels, the combination of correlations and non-Markovianity can more effectively reduce the entropic uncertainty and its lower bound. Under such channels, correlations of the channel reduce the entropic uncertainty and its lower bound during the whole evolution, while the non-Markovianity contributes to their oscillations and reduce them in some specific time. Furthermore, the results show that the entropic uncertainty and its lower bound reach steady values that depend only on the strength of the correlations after long-time evolution. In other words, the stronger the correlations, the lower the entropy uncertainty and its lower bound of steady states will be. Finally, we analyse the physical nature of the decrease of the entropic uncertainty and its lower bound, and it is found that the decrease of the entropic uncertainty and its lower bound originate from the increase of the quantum correlations in the system.

Keywords: uncertainty relation, correlated channel, non-Markovianity, quantum correlation

PACS: 03.65.Yz, 03.67.-a

DOI: [10.7498/aps.73.20241171](https://doi.org/10.7498/aps.73.20241171)

CSTR: [32037.14.aps.73.20241171](https://cstr.net.cn/detail/32037.14.aps.73.20241171)

关联退相位有色噪声通道下熵不确定关系的调控

余敏 郭有能

Regulation of entropic uncertainty relation in correlated channels with dephasing colored noise

Yu Min Guo You-Neng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 220301 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20241171

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20241171>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

不确定性的定量描述和熵不确定关系

Quantitative description of uncertainty and entropic uncertainty relation

物理学报. 2023, 72(11): 110303 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222443>

熵不确定度关系综述

Review on entropic uncertainty relations

物理学报. 2022, 71(7): 070302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212197>

非马尔科夫环境中Werner态的量子非局域关联检验研究

Quantum non-local correlation testing of Werner state in non-Markovian environment

物理学报. 2024, 73(16): 160301 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240450>

一种与开放系统初态无关的非马尔科夫度量

Non-Markovian measure independent of initial states of open systems

物理学报. 2022, 71(21): 210303 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221053>

不同外加磁场中Kaplan-Shekhtman-Entin-Wohlman-Aharony相互作用对量子失协非马尔科夫演化的影响

Effects of Kaplan-Shekhtman-Entin-Wohlman-Aharony interaction on quantum discord of non-markovian dynamics under different magnetic fields

物理学报. 2021, 70(22): 223401 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211277>

基于四波混频过程产生介于锥形探针光和锥形共轭光之间的多模量子关联

Experimental generation of multimode quantum correlations between a conical probe and a conical conjugate based on a four-wave mixing process

物理学报. 2022, 71(16): 160306 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220081>