

复相互作用调制的两粒子系统中的局域化转变*

郝佳鑫¹⁾ 徐志浩^{1)2)†}

1) (山西大学理论物理研究所, 光量子技术与器件全国重点实验室, 太原 030006)

2) (山西大学极端光学协同创新中心, 太原 030006)

(2024 年 12 月 6 日收到; 2025 年 1 月 18 日收到修改稿)

研究了一维复相互作用调制的非厄米玻色子模型. 通过数值计算能谱的实-复转变、Shannon 熵、标准参与比率与拓扑缠绕数发现, 当相互作用强度低于临界相互作用强度时, 系统的能谱全为实数, 处于扩展相, 且系统是拓扑平庸的; 而当相互作用强度超过临界相互作用强度时, 系统开始出现复能谱, 处于扩展态与局域态混合相, 且此时系统是拓扑非平庸的. 计算结果表明, 能谱的实-复转变点、扩展-局域的转变点与拓扑转变点相一致. 动力学演化结果可以验证系统的实-复转变与局域化转变. 最后, 提出利用二维光子波导阵列可以模拟这一复相互作用调制的一维玻色子模型. 此项工作将为非厄米两体系统的局域性质提供很好的参考.

关键词: 非厄米, 局域化, 拓扑, 宇称-时间对称性**PACS:** 72.80.Ng, 72.15.Rn, 03.65.Vf**DOI:** 10.7498/aps.74.20241691**CSTR:** 32037.14.aps.74.20241691

1 引言

安德森局域化^[1]是凝聚态物理中的重要概念, 揭示了在无序介质中, 电子波函数因散射效应而局域化的过程. 该现象于 1958 年由 Anderson 首次提出, 并已在各类实验平台上得到了验证, 包括冷原子^[2,3]、微波腔^[4,5]和光子晶体^[6]等. 安德森局域化对于理解金属-绝缘体转变以及低维系统的导电性具有重要意义. 最近发现在无序系统中引入相互作用将导致多体局域化的发生^[7]. 处于多体局域相的系统具有长期存储初始状态信息的潜力, 使得其在动态量子控制和量子存储方面具有潜在的应用前景. 然而由于数值计算的限制, 多体局域相的稳定性仍然存在争议. 徐志浩等^[8]研究了一维准周期晶格的紧束缚的玻色子对系统, 间接证明了在热力学

极限下多体局域化以及多体迁移率边的存在.

另一方面, 非厄米系统在动力学、拓扑和输运等方面展现了与厄米系统迥异的特性, 例如宇称-时间 (PT) 对称性破缺^[9]、奇异点^[10,11]、非厄米趋肤效应^[12]、边界依赖的能谱^[13]、体边对应关系的失效^[14,15]、反常局域化转变^[16]以及丰富的拓扑分类^[17]等. 非厄米性与无序效应的结合为局域化现象的研究提供了新的思路. Hatano 和 Nelson^[18-20]在单粒子格点模型中引入了在位无序和非互易跃迁, 展示了一维随机无序中的安德森局域化转变. Longhi 和 Stefano^[21]在一维准晶系统中引入一个具有 PT 对称性的准周期调制势, 发现系统中能谱的实-复转变、局域化转变和拓扑转变相一致. 非厄米效应同时也极大地改变了多体效应, 导致很多奇异性质的出现, 包括出现实空间的费米面、非厄米多体局域化现象^[22,23]、非厄米 Stark 多体局域化^[7]与实-

* 国家自然科学基金 (批准号: 12375016, 12461160324)、山西省基础研究计划 (批准号: 20210302123442)、北京凝聚态物理国家实验室 (批准号: 2023BNLCMPKF001) 和山西省“1331 工程”重点学科建设计划资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xuzhihao@sxu.edu.cn

复转变不一致等. 此外, 非厄米相互作用体系可以在许多实验平台实现. 例如, 人们在冷原子体系中利用两体非弹性散射, 实现了复相互作用的玻色哈伯德模型^[24,25]. 特别是, 文献^[26,27]提出了一种可以将 d 维中的 N 体问题映射到一个 Nd 维的单体问题方案, 使得在电路和光子晶体等实验平台模拟非厄米少体问题成为了可能. 最近, 利用硅基绝缘体技术构建了一个二维光子晶格来模拟一维两粒子相互作用的非厄米系统^[28-30]. 之前的研究主要关注在位无序势对系统局域化的影响, 而本文基于光子晶体的高度可控性, 设计了一个复相互作用调制的两粒子模型, 研究复相互作用对系统局域化转变的影响, 发现复准周期调制的相互作用可以导致局域化的发生, 且局域化转变点与能谱的实-复转变点和拓扑转变点相一致.

2 模型与方法

本文考虑一个由复相互作用调制的两玻色子模型, 其哈密顿量为

$$\hat{H} = -J \sum_j (\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \text{h.c.}) + \sum_j \frac{U_j}{2} \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1), \quad (1)$$

$$U_j = U e^{2i\pi\alpha j}. \quad (2)$$

这里, $\hat{c}_j^\dagger (\hat{c}_j)$ 表示玻色子在第 j 个格点的产生 (湮灭) 算符; $\hat{n}_j = \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j$ 是粒子数算符; J 是跃迁强度, 设为能量单位, 即 $J = 1$. 当 α 为有理数时, 系统具有平移不变性, 满足布洛赫定理, 其波函数始终具有扩展态的性质. 本文中 α 选为无理数, 相应的 U_j 为准周期调制, 系统的平移不变性被破坏. 这里取 $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$. 当 $U = 0$ 时, 系统的单粒子能谱为 $E = -2J \cos(k)$, 此时体系处于扩展相, 其动力学表现出弹道运输的特点. 而当 $U \neq 0$ 时, 由于满足 $U_{-j} = U_j^*$, 此系统具有 PT 对称性, 期待随着相互作用强度 U 的增大, 该系统的哈密顿量会存在一个实谱到复谱的转变.

本文考虑系统尺寸为 L 的两玻色子系统, 研究系统的希尔伯特空间可通过一系列的 Fock 态来构造, 可表示为

$$B = \{|1_l, 1_{l'}\rangle, |2_l\rangle\}, \quad (3)$$

式中, Fock 基矢 $|1_l, 1_{l'}\rangle$ 表示一个玻色子处在 l 格点和另一个玻色子处在 l' 格点的状态, Fock 基矢

$|2_l\rangle$ 表示两玻色子处在同一个格点 l 的状态. 这里, $l, l' = 1, 2, \dots, L$, 进而利用精确对角化方法在周期边界条件下对哈密顿量 (1) 进行数值处理.

3 复相互作用诱导的三相转变

首先分析一下系统能谱的特性. 在 $U = 0$ 时, 系统的能量均为实值. 而在大 U 极限下, 系统的能量由 U_j 决定, 即当两粒子处于同一格点时相应的能量均为复值. 由于系统具有 PT 对称性, 在相互作用强度 U 增大的过程中, 必然存在一个 PT 对称的破缺点, 使得能谱由实变为复. 图 1(a) 与图 1(b) 分别展示了 $U = 1$ 与 $U = 3$ 时系统的能谱情况. 可以看到, 当相互作用强度取较小值时, 系统全部为实能谱, 此时系统 PT 对称性未破缺. 而当相互作用强度取较大值时 (如图 1(b) 中, 相互作用强度 $U = 3$), 在复能谱平面内, 围绕系统的实能谱出现了一个复能量环, 表明此时系统的 PT 对称性破缺. 图 1(c) 展示了不同尺寸下, 能量虚部的绝对值的最大值随相互作用强度的变化. 可以看到, 对于不同尺寸, 系统的实-复转变发生在 $U = 2$ 处. 在相变点 $U = 2$ 之前, 能量虚部的绝对值的最大值随着系统尺寸的增加而在减小; 而当 $U > 2$ 时, 能量虚部的绝对值的最大值展示出不依赖于系统尺寸的行为. 计算结果表明随着相互作用强度 U 的增加, 此系统的能谱存在实-复转变. 且在 $U = 2$ 时, PT 对称性破缺. 为了探究图 1(b) 中复能量环形成的具体原因, 图 1(e) 展示了 $U = 3$ 所有复能量本征态所对应两玻色子的坐标关联函数总和, 即 $\Gamma_{i,j} = \sum_n \Gamma_{i,j}^{(n)}$. 为了与图 1(e) 形成鲜明对比, 图 1(d) 展示了 $U = 1$ 虚部最大值所对应本征态的两玻色子的坐标关联. 对于给定的能量 E_n , 其两粒子关联函数定义为

$$\Gamma_{i,j}^{(n)} = \langle \Psi_n^L | c_i^\dagger c_j^\dagger c_j c_i | \Psi_n^R \rangle, \quad (4)$$

式中, E_n 对应于所有的复能量, $|\Psi_n^L\rangle$ 和 $|\Psi_n^R\rangle$ 分别为 $\hat{H}$ 的左和右本征态, 即 $\hat{H}|\Psi_n^R\rangle = E_n|\Psi_n^R\rangle$ 以及 $\hat{H}^\dagger|\Psi_n^L\rangle = E_n^*|\Psi_n^L\rangle$, 且 $\langle \Psi_n^L | \Psi_m^R \rangle = \delta_{nm}$. 可以看到, 当 $U = 1$ 时, 两粒子关联函数 $\Gamma_{i,j}^{(n)}$ 的值遍及整个关联矩阵, 表明两粒子处于扩展态. 当 $U = 3$ 时, 复能量本征态所对应的两粒子关联函数 $\Gamma_{i,j}$ 的值均分布在主对角线上, 表明在复能量环上形成两粒子占同一格点的束缚态.

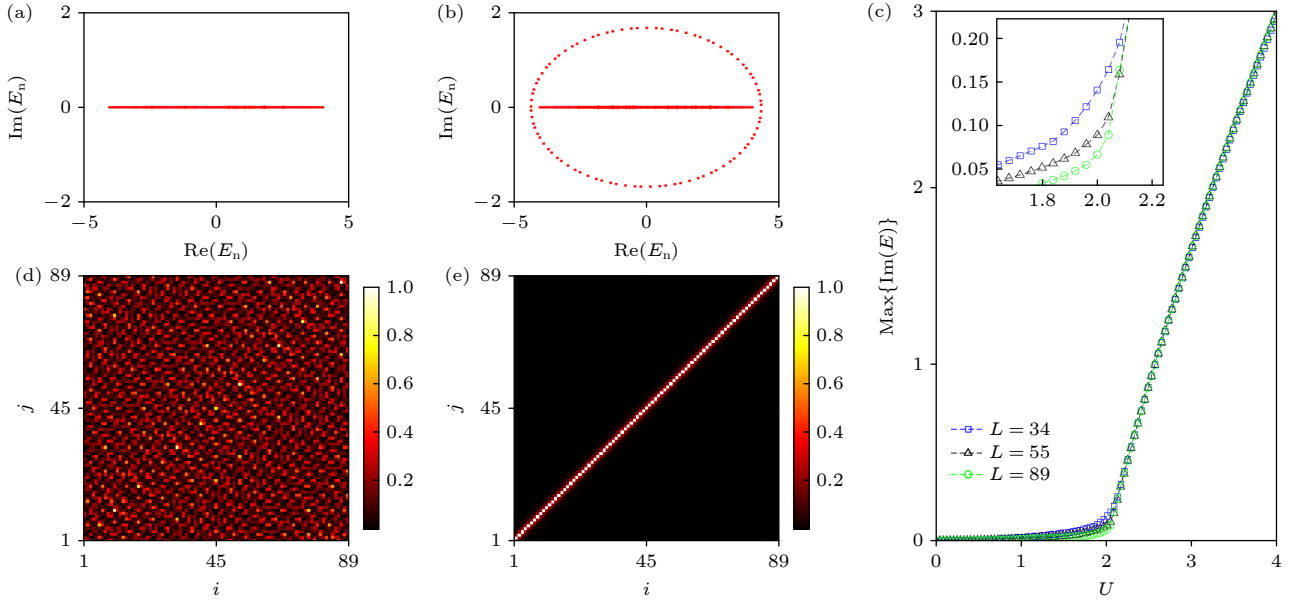


图 1 (a) $U = 1$ 和 (b) $U = 3$ 时系统的能谱; (c) 不同尺寸下能量虚部的绝对值的最大值随 U 的变化; (d) $U = 1$ 时, 能量虚部最大值所对应本征态的两玻色子的坐标关联; (e) $U = 3$ 时, 复能量环上两玻色子的坐标关联

Fig. 1. Complex energy spectrum for (a) $U = 1$ and (b) $U = 3$, respectively; (c) the maximum value of the absolute value of the imaginary part of energy as a function of U for different L ; (d) the coordinate correlation of two bosons corresponding to the eigenstate with the maximum value of the imaginary part of energy for $U = 1$; (e) the coordinate correlation of two bosons on the complex energy ring for $U = 3$.

由于准周期调制的存在, 系统中可能会出现局域化转变. Shannon 熵作为刻画系统的局域化性质的物理量被广泛应用. 当系统处于扩展态时, 其熵值较高, 表示系统中的粒子可以自由移动. 相反, 当系统处于局域态时, 其熵值较低, 表示粒子被局域在特定的区域内, 运动受到限制. 对于给定能量 E_n , 其 Shannon 熵定义为

$$S(E_n) = - \sum_{j=1}^L \rho_j^{(n)} \ln(\rho_j^{(n)}), \quad (5)$$

式中 $\rho_j^{(n)} = \langle \Psi_n^L | \hat{n}_j | \Psi_n^R \rangle$. 图 2(a) 与图 2(b) 分别展示了相互作用强度为 $U = 1$ 与 $U = 3$ 下的 Shannon 熵随能量 E_n 的实部的变化. 可以看出: $U = 1$ 时, 不同能量值下的 Shannon 熵的值偏高, 表明此时系统几乎所有的态均为扩展态; $U = 3$ 时, 除了先前的高熵以外, 系统出现了低熵的部分, 经验证低熵部分为能量为复的两粒子占同一格点的态, 这部分态表现出局域的性质, 而能量仍为实数的单占据态仍然为高熵部分, 表现为扩展态的性质. 在不同相互作用强度下的 Shannon 熵发生了显著的改变, 表明复相互作用能够使得体系的局域化性质发生改变.

标准参与率 $\eta(E_n)$ 也可以用来表征多体态的局域化性质^[31], 其定义为

$$\eta(E_n) = \frac{1}{\sum_{\{\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_L\}} |\Psi_n^R(\{\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_L\})|^4 V_H}, \quad (6)$$

式中, V_H 表示希尔伯特空间的维度; $\{\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_L\}$ 表示在希尔伯特空间下的 Fock 基矢, 其中 $\tilde{n}_j$ 表示在第 j 个格点位置所占据的粒子数. 在热力学极限下, $\eta(E_n)$ 趋于零时, 多体波函数为局域态, 而当 $\eta(E_n)$ 为有限值时, 波函数为扩展态. 图 2(c) 与图 2(d) 分别展示了标准参与率 $\eta(E_n)$ 在不同相互作用 U 下随能量本征值 E_n 的实部与虚部的变化情况. 可以看到, 随着 U 的增加, 系统由全部为高 $\eta(E_n)$ 值相区转变为具有高标准参与率和低标准参与率混合的相区, 即系统由全部为扩展态组成的扩展相转变为由扩展态与局域态混合的相区. 从图 2(d) 可以看出, 在 $U = 2$ 处开始出现明显的能量虚部, 而相应能量具有非零虚部所对应的态为局域态. 这表明系统在 $U = 2$ 时, 发生扩展-局域转变, 且局域态对应于能量为复的态.

拓扑缠绕数^[32,33]可以用来表征非厄米系统的拓扑性质, 其定义为

$$\omega = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi i} \partial_\theta \ln \left\{ \det [\hat{H}(\theta/L) - E_0] \right\}, \quad (7)$$

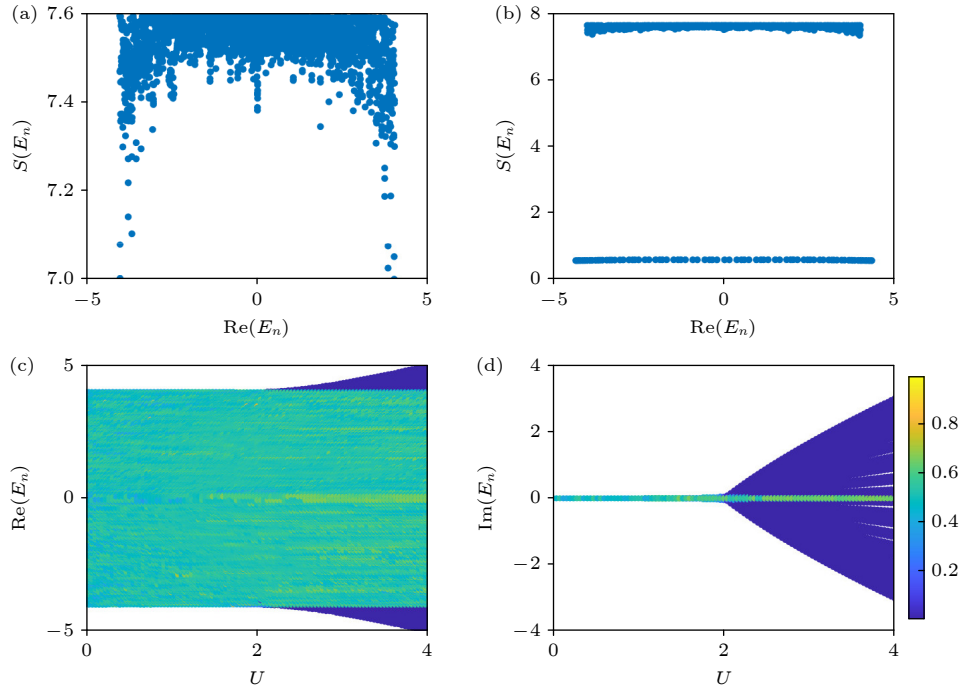


图 2 (a) $U = 1$ 和 (b) $U = 3$ 时系统的 Shannon 熵随能量本征值的变化; (c) $\eta(E)$ 在不同的相互作用 U 下随能量本征值 E_n 的实部的变化; (d) $\eta(E_n)$ 在不同的相互作用 U 下随能量本征值 E_n 的虚部的变化; 这里, $L = 89$

Fig. 2. The Shannon entropy as the function of $\text{Re}(E_n)$ for (a) $U = 1$ and (b) $U = 3$, respectively; (c) $\eta(E_n)$ as the function of $\text{Re}(E_n)$; (d) $\eta(E_n)$ as the function of $\text{Im}(E_n)$. Here, $L = 89$.

式中, E_0 为此系统在复能谱平面内的基准能量, 取 $E_0 = 0$. 将 $U_j = Ue^{2i\pi\alpha j}$ 替换成 $U_j = Ue^{i(2\pi\alpha j + \theta/L)}$, 可以得到 $\hat{H}(\theta/L)$. 拓扑缠绕数 ω 表示相位 θ 从 0 到 2π 变化时 $\hat{H}$ 的复能谱轨迹绕行 E_0 的次数. 图 3 给出了缠绕数 ω 随相互作用强度 U 变化的图像. 在 PT 未破缺区, 系统的能谱都为实数, 缠绕数为 0. 相互作用强度 U 增加到 2 时, 系统进入到 PT 对称性破缺的局域区, 随着 θ 的变化能谱绕着 $E_0 = 0$ 点转动一圈, 其缠绕数为 1. 拓扑相转变点大致发生在 $U = 2$ 处, 这与我们先前的局域化转变点以及能谱的实-复转变点相一致. 说明随着相互作用强

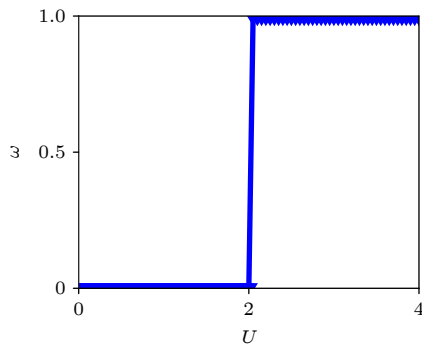


图 3 缠绕数 ω 随相互作用强度 U 的变化
Fig. 3. Winding number ω as a function of U .

度 U 增加到 2, 系统会经历一个由拓扑平庸到拓扑非平庸的转变.

4 动力学演化

最后, 通过考虑两玻色子的动力学演化来探测系统的局域化与实-复转变特性. 这里, 初始状态选择为两个玻色子同时占据中间格点位置, 即 $|\Psi_{\text{ini}}\rangle = |j_0\rangle$, 其中 j_0 为中间格点位置, 动力学演化满足:

$$|\Psi'(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\Psi_{\text{ini}}\rangle. \quad (8)$$

由于 $\hat{H}$ 的非厄米性, 导致非么正演化和未归一化态的出现, 对其归一化, 得到

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi'(t)\rangle / \sqrt{\langle\Psi'(t)|\Psi'(t)\rangle}. \quad (9)$$

图 4(a) 与图 4(b) 分别展示了该模型在 $U = 1$ 与 $U = 3$ 时, 在周期边界条件下两玻色子的动力学演化过程. 当 $U = 1$ 时, 粒子呈弹道式扩散, 并且在相对较短的时间窗口内几乎均匀地填满整个晶格, 这是 PT 对称性未破缺的扩展相中的预期行为. 与此同时, 当 $U = 3$ 时, 初始粒子保持空间局域化, 直到出现非厄米跃迁行为, 这体现了非厄米局域相的特

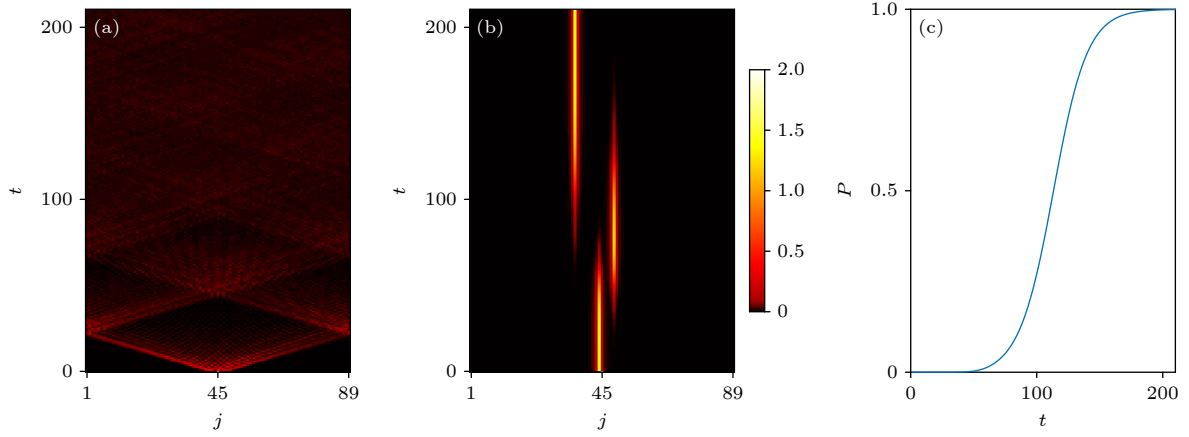


图 4 (a) $U = 1$ 和 (b) $U = 3$ 时坐标空间下两玻色子系统的密度演化; (c) $U = 3$ 时, $P(t)$ 随时间的演化; 这里, $L = 89$

Fig. 4. Density evolution of a two-boson system in position space with (a) $U = 1$ and (b) $U = 3$, respectively; (c) the time evolution of $P(t)$ for $U = 3$. Here, $L = 89$.

点. 因此, 该系统中玻色子的两种不同相可以通过动力学演化进行探测和区分.

对于非厄米系统, 系统的能量会由实部 $\text{Re}(E_n)$ 与虚部 $\text{Im}(E_n)$ 组成, 可以将 (8) 式进一步写成:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n \langle \Psi_n^L | \Psi_{\text{ini}} \rangle e^{-it\text{Re}E_n} e^{t\text{Im}E_n} |\Psi_n^R\rangle. \quad (10)$$

从 (10) 式可以看出, $|\Psi(t)\rangle$ 由三项组成, 分别为 $\langle \Psi_n^L | \Psi_0 \rangle$, $e^{-it\text{Re}E_n}$ 和 $e^{t\text{Im}E_n}$, 当 U 取较大值时, 系统的 PT 对称性出现破缺, 则 $\text{Im}(E_n) \neq 0$. 故 $|\Psi(t)\rangle$ 最终会由 $\langle \Psi_n^R | \Psi_{\text{ini}} \rangle$ 和 $e^{t\text{Im}E_n}$ 主导. 随着时间的推移, $e^{t\text{Im}E_n}$ 会随时间呈指数式增加, 说明在长时间的动力学演化过程中, 系统最终会演化到虚部最大值所对应的本征态. 图 4(c) 展示了当 $U = 3$ 时, 即存在复能谱时, $P(t) = \langle \Psi(t) | \Psi_{\text{max}}^R \rangle$ 随时间的演化过程, 其中 $|\Psi_{\text{max}}^R\rangle$ 表示虚部最大值所对应的右本征态. 计算结果表明, 随着时间的推移, $\langle \Psi(t) | \Psi_{\text{max}}^R \rangle$ 的交叠从 0 演变到了 1, 表明对于存在复能谱的非厄米系统的动力学演化中, 系统最终会演化到虚部最大值所对应的本征态, 该本征态为此系统的稳态.

5 实验方案

二维光子波导阵列是模拟一维晶格中具有相互作用的两个玻色子的一种最具前景的候选方案. 因为一维两粒子薛定谔方程中的概率振幅在形式上可以映射到二维光子波导阵列中的光传播的耦合模方程中, 具体表示为

$$\begin{aligned} i\partial_z \Phi_{i,j} = & -J_{j,j}^{i,i-1} \Phi_{i-1,j} - J_{j,j}^{i,i+1} \Phi_{i+1,j} \\ & -J_{j,j-1}^{i,i} \Phi_{i,j-1} - J_{j,j+1}^{i,i} \Phi_{i,j+1} \\ & + U_j \delta_{i,j} \Phi_{i,j}, \end{aligned} \quad (11)$$

式中, $\Phi_{i,j}$ 表示第 i 列和第 j 行的波导处光场的振幅, 类比于一维情况下非厄米哈密顿量 (1) 描述的一个粒子处于 i 格点, 另一个粒子处于 j 格点的概率, 传播距离 z 类似于演化时间 t ; $J_{j,j}^{i,i\pm 1}$ 表示第二个粒子处于 j 格点的位置不变, 第一个粒子从 i 格点向 $i \pm 1$ 格点的跃迁概率; 而 $J_{j,j\pm 1}^{i,i}$ 表示第一个粒子处于 i 格点的位置不变, 第二个粒子从 j 格点向 $j \pm 1$ 格点的跃迁概率, 该跃迁概率可以通过调节两最近邻波导之间的距离来实现. 两玻色子在位相互作用 U_j 的实部与虚部可以通过调节二维方格子主对角线上波导折射率的实部与虚部来实现, 而折射率的调节是通过调节对角波导阵列的传播常数来实现. 这样一个二维几何结构使得人们能够直接观察到空间相关性, 从而等效地探测一维复相互作用调制的两粒子的运动行为. 为了仿真这一非厄米两体问题, 在二维波导阵列中, 设 (j_0, j_0) 为系统的初态 $|\psi'_{\text{ini}}\rangle$, 其动力学演化满足方程 (11), 图 5(b) 与图 5(c) 分别为当 $t = 200$, 在 $U = 1$ 与 $U = 3$ 时, 粒子在二维平面内的密度分布的图像. 当 $U = 1$ 时, 演化结果显示光在波导阵列中呈现遍历所有波导的状态, 对应于二体系统的扩展状态, 符合图 4(a) 的结果. 当 $U = 3$ 时, 演化结果显示光转移到了 $(36, 36)$ 波导处, 即两个粒子都占据第 36 个格点, 此结果与图 4(b) 的结果相符合.

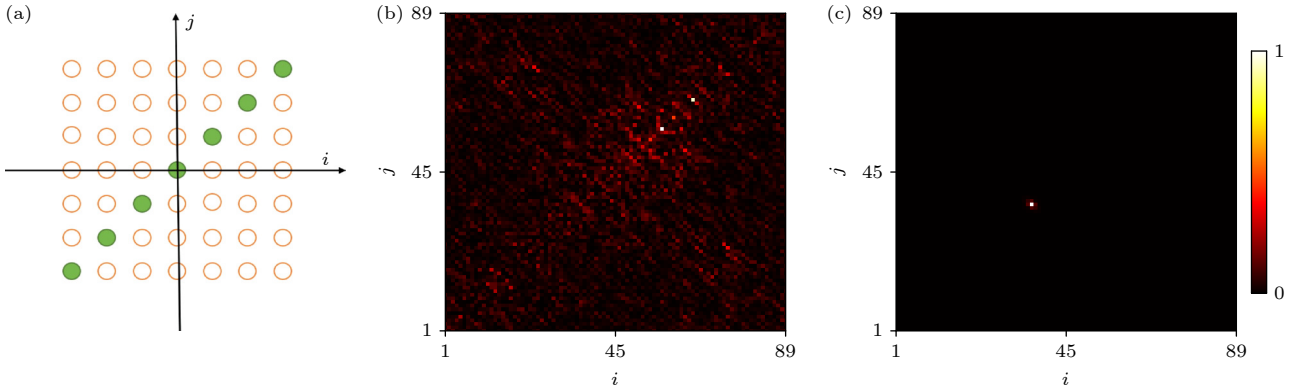


图 5 (a) 二维光子波导阵列的示意图 (每个圆圈代表一个波导. 橘黄色空圆圈和绿色圆圈分别标示具有不同折射率的波导, 从而有效地实现复调制的在位相互作用. 这个二维几何结构关于对角线对称); (b) $U = 1$ 和 (c) $U = 3$ 时 $t = 200$ 时刻粒子在二维平面内的密度扩散

Fig. 5. (a) Schematic diagram of the two-dimensional linear photonic waveguide array. Each circle represents a waveguide. Orange-yellow hollow and green-colored circles label waveguides with different refractive indices, which can effectively control the complex modulated on-site interactions. This two-dimensional geometric structure is symmetric with respect to the diagonal. The density distributions of the wave packets in the 2D plane at time $t = 200$ for (b) $U = 1$ and (c) $U = 3$, respectively.

6 结 论

本文研究了由复相互作用调制的一维两玻色子模型. 通过分析系统的能谱、Shannon 熵、标准参与率以及拓扑缠绕数, 发现在 $U = 2$ 处系统的能谱的实-复转变点、局域化转变点以及拓扑转变点相一致. 利用动力学演化可以验证系统的实-复转变与局域化转变特性. 最后, 利用二维光子波导阵列可实现这一复相互作用调制的一维两粒子模型.

参考文献

- [1] Anderson P W 1958 *Phys. Rev.* **109** 1492
- [2] Billy J, Josse V, Zuo Z, Bernard A, Hambrecht B, Lugan P, Clément D, Sanchez-Palencia L, Bouyer P, Aspect A 2008 *Nature* **453** 891
- [3] Roati G, D'Errico C, Fallani L, Fattori M, Fort C, Zaccanti M, Modugno G, Modugno M, Inguscio M 2008 *Nature* **453** 895
- [4] Chabanov A A, Stoytchev M, Genack A Z 2000 *Nature* **404** 850
- [5] Pradhan P, Sridhar S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2360
- [6] Lahini Y, Pugatch R, Pozzi F, Sorel M, Morandotti R, Davidson N, Silberberg Y 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 013901
- [7] Liu J H, Xu Z H 2023 *Phys. Rev. B* **108** 184205
- [8] Xu Z H, Huang F H L, Zhang Y B 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 087201 (in Chinese) [徐志浩, 皇甫宏丽, 张云波 2019 物理学报 **68** 087201]
- [9] Bender Carl M, Stefan Boettcher 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
- [10] Heiss W D 2012 *Phys. Rev. A* **45** 444016
- [11] Miri M A, Alù A 2019 *Science* **363** 086803
- [12] Yao S, Song F, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 136802
- [13] Ou Z, Wang Y, Li L 2023 *Phys. Rev. B* **107** L161404
- [14] Yao S, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803
- [15] Borgnia D S, Kruchkov A J, Slager R J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 056802
- [16] Feinberg J, Zee A 1999 *Phys. Rev. E* **59** 6433
- [17] Kawabata K, Shiozaki K, Ueda M, Sato M 2019 *Phys. Rev. X* **9** 041015
- [18] Hatano N, Nelson D R 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 570
- [19] Hatano N, Nelson D R 1997 *Phys. Rev. B* **56** 8651
- [20] Hatano N, Nelson D R 1998 *Phys. Rev. B* **58** 8384
- [21] Longhi, Stefano 2019 *Phys. Rev. B* **100** 125157
- [22] Hamazaki R, Kawabata K, Ueda M 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 090603
- [23] Zhai L J, Yin S, Huang G Y 2020 *Phys. Rev. B* **102** 064206
- [24] Tomita T, Nakajima S, Danshita I, Takasu Y, Takahashi Y 2017 *Sci. Adv.* **3** e1701513
- [25] Sponselee K, Freystatzky L, Abeln B, et al. 2018 *Quantum Sci. Technol.* **4** 0140027
- [26] Lee C H 2021 *Phys. Rev. B* **104** 195102
- [27] Shen R, Lee C H 2022 *Commun. Phys.* **5** 238
- [28] Gao M, Sheng C, Zhao Y, et al. 2024 *Phys. Rev. B* **110** 094308
- [29] Corrielli G, Crespi A, Della Valle G, Longhi S, Osellame R 2013 *Nat. Commun.* **4** 1555
- [30] XingY, Zhao X D, Lü Z, et al. 2021 *Optics Express* **29** 40428
- [31] Wang Y C, Hu H P, Chen S 2016 *Eur. Phys. J B* **89** 1
- [32] Zhou L W, Han W Q 2021 *Chin. Phys. B* **30** 100308
- [33] Tian Q, Gu Y J, Zhou L W 2024 *Phys. Rev. B* **109** 054204

Localization transition in a two-particle system with complex interaction modulation^{*}

HAO Jiaxin¹⁾ XU Zhihao^{1)2)†}

1) (*State Key Laboratory of Quantum Optics Technologies and Devices, Institute of Theoretical Physics,
Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

2) (*Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

(Received 6 December 2024; revised manuscript received 18 January 2025)

Abstract

In this work, we investigate a one-dimensional two-boson system with complex interaction modulation, described by the Hamiltonian: $\hat{H} = -J \sum_j (\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \text{h.c.}) + \sum_j \frac{U}{2} e^{2i\pi\alpha j} \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1)$, where U is the interaction amplitude, and the modulation frequency $\alpha = (\sqrt{5} - 1)$ is an irrational number. The interaction satisfies $U_{-j} = U_j^*$, which ensures that the system possesses party-time (PT) reversal symmetry. Using the exact diagonalization method, we numerically calculate the real-to-complex transition of the energy spectrum, Shannon entropy, the normalized participation ration, and the topological winding number. For small U , all eigenvalues are real. However, as U increases, eigenvalues corresponding to two particles occupying the same site become complex, marking a PT symmetry-breaking transition at $U = 2$. This point signifies a real-to-complex transition in the spectrum. To characterize the localization properties of the system, we employ the Shannon entropy and the normalized participation ration (NPR). When $U < 2$, all the eigenstates are extended, exhibiting high Shannon entropy and NPR values. Conversely, for $U > 2$, states with complex eigenvalues show low Shannon entropy and significantly reduced NPR, indicating localization. Meanwhile, states with real eigenvalues remain extended in this regime. We further analyze the topological aspects of the system by using the winding number. A topological phase transition occurs at $U = 2$, where the winding number changes from 0 to 1. This transition coincides with the onset of PT symmetry breaking and the localization transition. The dynamical evolution can be used to detect the localization properties and the real-to-complex transition, with the initial state being two bosons occupying the center site of the chain simultaneously. Finally, we propose an experimental realization by using a two-dimensional linear photonic waveguide array. The modulated interaction can be controlled by adjusting the real part and imaginary part of the refractive index of diagonal waveguide. To simulate this non-Hermitian two-body problem, we numerically calculate the density distribution of the wave packet in a two-dimensional plane, which indirectly reflects the propagation of light in a two-dimensional waveguide array. We hope that our work can deepen the understanding of the relation between interaction and disorder while arousing further interest in two-body systems and non-Hermitian localization.

Keywords: non-Hermitian, localization, topology, party-time symmetry

PACS: 72.80.Ng, 72.15.Rn, 03.65.Vf

DOI: 10.7498/aps.74.20241691

CSTR: 32037.14.aps.74.20241691

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12375016, 12461160324), the Fundamental Research Program of Shanxi Province, China (Grant No. 20210302123442), the Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics, China (Grant No. 2023BNLCMPKF001), and the Fund for Shanxi “1331Project” Key Subjects, China.

[†] Corresponding author. E-mail: xuzhihao@sxu.edu.cn

复相互作用调制的两粒子系统中的局域化转变

郝佳鑫 徐志浩

Localization transition in a two-particle system with complex interaction modulation

HAO Jiaxin XU Zhihao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 067201 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20241691

CSTR: 32037.14.aps.74.20241691

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20241691>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

高维宇称-时间对称系统中的信息恢复与临界性

Information retrieval and criticality in high-dimensional parity-time-symmetric systems

物理学报. 2022, 71(13): 130301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220511>

一维非厄米十字晶格中的退局域-局域转变

Delocalization-localization transitions in 1D non-Hermitian cross-stitch lattices

物理学报. 2024, 73(13): 137201 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240510>

非厄米耦合链中的局域化转变

Localization transition in non-Hermitian coupled chain

物理学报. 2024, 73(19): 197101 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240976>

随机两体耗散诱导的非厄米多体局域化

Random two-body dissipation induced non-Hermitian many-body localization

物理学报. 2024, 73(7): 077202 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231987>

非厄米准周期系统中的二次局域体态和局域-扩展的边缘态

Reentrant localized bulk and localized-extended edge in quasiperiodic non-Hermitian systems

物理学报. 2025, 74(1): 010301 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20240933>

宇称-时间对称与反对称研究进展

Research progress of parity-time symmetry and anti-symmetry

物理学报. 2022, 71(17): 171101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221323>