

球矢量波函数在地下旋电磁各向异性 介质球电磁散射中的应用*

贾永冰¹⁾ 耿友林^{1)†}

1) (杭州电子科技大学电子信息学院, 杭州 310018)

2) (杭州电子科技大学嘉善研究院, 嘉善 314100)

(2024 年 12 月 30 日收到; 2025 年 3 月 31 日收到修改稿)

给出了一种 T 矩阵法、球矢量波函数加法定理和镜像法结合研究地下旋电磁各向异性介质球电磁散射的解析方法. 针对传统方法主要集中于单点电场求解而缺乏电场分布全面分析的局限性, 计算了沿目标中心轴平行的 Y 轴直线 L 的地面上的散射场, 并与 FEKO 仿真结果进行对比验证. 结果表明, 所提出的球矢量波函数方法与 FEKO 仿真结果高度吻合, 验证了该方法的正确性. 在此基础上, 比较了两种方法在计算地下旋电磁各向异性介质球目标的计算效率. 最后, 给出了入射波频率和埋藏深度的变化对地面电场分布的影响, 验证了该方法在多场景下的适用性. 本文是现有的电磁散射理论的扩展, 可应用于地下目标探测等领域.

关键词: 地下旋电磁各向异性介质球体, 电磁散射, 球矢量波函数, T 矩阵法

PACS: 41.20.-q, 02.70.-c

DOI: 10.7498/aps.74.20241789

CSTR: 32037.14.aps.74.20241789

1 引言

地下各向异性介质球体的电磁散射在地下目标探测^[1,2]、地质勘探^[3]和隐身技术^[4,5]等领域具有重要的应用价值. 然而, 由于各向异性介质的复杂性, 其散射特性研究面临着较大的理论与计算挑战. 目前, 数值方法如矩量法 (method of moments, MOM) 和有限元法 (finite element method, FEM) 在解决复杂几何和电磁环境中的散射问题方面表现出较强的适应性, 并在地下介质中的电磁散射问题中得到了广泛应用^[6,7]. 然而, 这些数值方法高度依赖复杂网格的离散化, 尤其在处理电大尺寸问题时, 计算时间和内存消耗显著增加, 导致计算精度和效率受到限制^[8-10].

相比之下, 球矢量波函数法作为一种能够避免网格离散化依赖的研究方法, 以其潜在的高效性和精确性, 逐渐受到关注. 然而, 现有的大多数球矢量波函数法研究主要集中于地下各向同性介质的散射问题, 且通常仅计算平面上的单点电场强度. 例如, Zamani 等^[11]基于微扰法求解微粗糙界面下介质球的散射系数, 但仅适用于弱散射条件的简单介质球. Nasr 等^[12]提出镜像法和多次反射法, 解决了埋地圆柱体的散射问题, 但局限于圆柱形结构; 在此基础上, Zhang 等^[13]将镜像法和多次反射法以及球矢量波函数的加法定理相结合, 成功求解了埋地各向同性球体的电磁响应; Geng 等^[14]进一步扩展了其方法以适应双层介质球. 然而, 上述方法均假设介质为各向同性, 没有涉及到各向异性地下介质目标的特性问题.

* 国家自然科学基金 (批准号: 62141409) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: gengyoulin@aliyun.com

各向异性介质因其介电常数和磁导率以张量形式存在, 散射问题的计算复杂度显著增加, 目前相关研究主要集中在自由空间环境中. 例如, Li 等^[15]基于 T 矩阵法研究了光学频率下各向异性粒子的散射问题, 但其适用范围仅限于小尺寸规则球体, 且仅在自由空间中有效. 樊久扬等^[16]基于快速传输矩阵法研究了单轴/双轴双各向异性媒质的电磁特性, 但该方法主要应用于相对简单的几何结构, 尚未广泛验证其在地下复杂环境中的应用. 因此, 地下各向异性介质的散射问题仍鲜有研究. 然而, 地下目标的各向异性是普遍存在的, 如地下管道的钢筋混凝土结构^[17]、地下矿藏^[18]、煤炭的分层^[19]等都是各向异性介质.

本文在前面的基础上, 给出了一种利用各向异性 T 矩阵法^[15]、镜像法^[11]与球矢量波函数加法定理^[20]求解地下旋电磁各向异性介质球的电磁散射问题. 与以往主要计算单点电场强度^[12-14]的研究不同, 本文的方法实现了沿各向异性介质球轴向平行的地面直线 L 上的电场分布求解. 为验证本文提出的球矢量波函数方法的正确性, 采用了三维电磁仿真软件 FEKO 进行对比分析, 该软件以其高精度和广泛应用闻名, 常用于复杂电磁散射问题的验证^[21,22]. 在计算各向异性介质时, FEKO 基于 FEM 进行求解^[23], 但由于依赖复杂网格离散化, 尤其在大规模问题中, 计算时间和内存消耗较大. 相比之下, 本文提出的球矢量波函数方法无需网格化, 实现了更高效的计算和更快的收敛性. 结果表明, 本文提出的球矢量波函数方法与 FEKO 仿真结果具有高度一致性, 同时相比 FEKO 在计算效率上具有显著优势, 且方法更加简洁、高效.

2 理论公式

图 1 是地下埋藏旋电磁各向异性介质球电磁散射的几何结构. 区域 0 为自由空间, 区域 1 为具有相对介电常数 ε_{r1} 、相对磁导率 μ_{r1} 和电导率 σ_1 的各向同性导电介质, 区域 2 为埋藏的旋电磁各向异性球体, 其半径为 a 和埋藏深度为 d . 笛卡尔坐标系的原点位于球体中心. 平面波沿 z 轴在区域 0 中传播, 入射电场沿 x 轴方向极化, 幅值为 E_0 . 假定时间依赖性为 $\exp(-i\omega t)$, 在此后分析中已不再显示.

旋电磁各向异性球的介电常数和磁导率可以表示为^[15]

$$\bar{\mu} = \mu_s \begin{bmatrix} \mu_t & -i\mu_g & 0 \\ i\mu_g & \mu_t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_s \begin{bmatrix} \varepsilon_t & -i\varepsilon_g & 0 \\ i\varepsilon_g & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中 μ_s 和 ε_s 是常数因子; μ_t 表示磁导率在 x 轴和 y 轴方向上的表现; ε_t 表示介电常数在 x 轴和 y 轴方向上的表现; μ_g 表示磁响应中的旋磁项; ε_g 表示电响应中的旋电项.

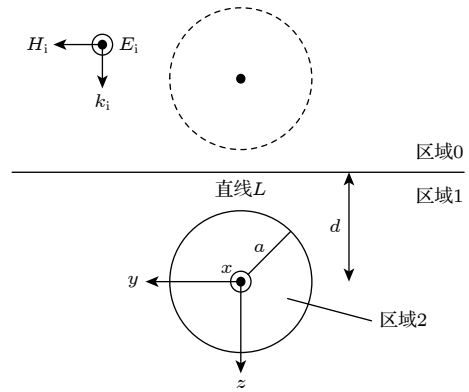


图 1 埋藏旋电磁各向异性球体的几何结构

Fig. 1. Geometry of the buried gyrotropic anisotropy sphere.

入射波的电场分量可表示为^[12,13]

$$\mathbf{E}^{il}(z) = \hat{x} E_0 e^{ik_0 z}, \quad z < -d, \quad (3)$$

其中 $\hat{x}$ 代表沿 x 轴正方向的单位向量.

经地面反射和透射的电场可以表示为^[12,13]

$$\mathbf{E}^{rl}(z) = \hat{x} R E_0 e^{-ik_0 z}, \quad z < -d, \quad (4)$$

$$\mathbf{E}^{tl}(z) = \hat{x} T E_0 e^{ik_1 z}, \quad z < -d, \quad (5)$$

式中, R 和 T 分别表示反射系数和透射系数. 通过在 $z = -d$ 处应用电场和磁场切向分量的连续性条件, 可以推导出 R 和 T 的具体表达式^[12,13]:

$$R = \frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 + \eta_0} e^{-2ik_0 d}, \quad (6)$$

$$T = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_0} e^{i(k_1 - k_0)d}, \quad (7)$$

式中, $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ 和 $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$ 分别是区域 0 和区域 1 的波阻抗; $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ 和 $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ 分别是区域 0 和区域 1 的波数, 其中 ω 为角频率, ε_0 和 μ_0 分别表示区域 0 的介电常数和磁导率, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_{r1} + i \frac{\sigma_1}{\omega \varepsilon_0} \right)$ 和 $\mu_1 = \mu_0 \mu_{r1}$ 分别表示区域 1

的介电常数和磁导率.

如 Li 等 [15] 所示, 对于旋电磁各向异性介质球的内部场求解, 可以根据麦克斯韦方程以及球矢量波函数的性质, 给出旋电磁各向异性介质球内部磁感应强度 $\mathbf{B}_l$, 表示为 [15]

$$\mathbf{B}_l = \sum_{n,m} \bar{E}_{mn} [d_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k, \mathbf{r}) + c_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k, \mathbf{r})], \quad (8)$$

其中 k 是待确定的波数, 求和式 $\sum$ 中的 n 从 1 到 $+\infty$, 而 m 对于每个 n 从 $-n$ 求和至 n ; $\mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k, \mathbf{r})$ 和 $\mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k, \mathbf{r})$ 是各向同性介质中第一类球矢量波函数; c_{mn} 和 d_{mn} 是与旋电磁各向异性介质相关的系数. 求和系数定义为 $\bar{E}_{mn} = i^n T E_0 C_{mn}$, C_{mn} 的具体表达式为 [15]

$$C_{mn} = \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2}. \quad (9)$$

磁感应强度 $\mathbf{B}_l$ 也可以表示为 [15]

$$\mathbf{B}_l = \sum_{v,u} \bar{E}_{uv} [d_{uv} \mathbf{M}_{uv} + c_{uv} \mathbf{N}_{uv}]. \quad (10)$$

基于球矢量波函数在直角坐标系下的表达式, 可以得到 $\mu_s \bar{\boldsymbol{\mu}}^{-1} \cdot \mathbf{M}_{mn}$, $\mu_s \bar{\boldsymbol{\mu}}^{-1} \cdot \mathbf{N}_{mn}$, $\varepsilon_s \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1} \cdot \mathbf{M}_{mn}$, $\varepsilon_s \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1} \cdot \mathbf{N}_{mn}$ 展开成球矢量波函数的表达式, 具体表达式见文献 [15]. 将 (10) 式两边都乘以参数 $\mu_s \bar{\boldsymbol{\mu}}^{-1}$, 表达式如下:

$$\begin{aligned} \mu_s \bar{\boldsymbol{\mu}}^{-1} \cdot \mathbf{B}_l = \sum_{q,p} \bar{E}_{pq} (\bar{d}_{pq} \mathbf{M}_{pq} + \bar{c}_{pq} \mathbf{N}_{pq} \\ + \bar{\omega}_{pq} \mathbf{L}_{pq}) + \bar{\omega}_{00} \mathbf{L}_{00}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中系数 $\bar{d}_{pq}$, $\bar{c}_{pq}$, $\bar{\omega}_{pq}$, $\bar{\omega}_{00}$ 的具体表达式见文献 [15]. 对式 (11) 取旋度再乘以 $\varepsilon_s \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1}$, 可以得到如下表达式:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1} \cdot (\nabla \times \mu_s \bar{\boldsymbol{\mu}}^{-1} \cdot \mathbf{B}_l) \\ = \sum_{n,m} \bar{E}_{mn} (\bar{c}_{mn} \mathbf{M}_{mn} + \bar{d}_{mn} \mathbf{N}_{mn} + \bar{\omega}_{mn} \mathbf{L}_{mn}) \\ + \bar{\omega}_{00} \mathbf{L}_{00}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中系数 $\bar{c}_{mn}$, $\bar{d}_{mn}$, $\bar{\omega}_{mn}$, $\bar{\omega}_{00}$ 的具体表达式见文献 [15]. 由麦克斯韦方程组和本构方程, 容易推导出以下表达式:

$$\nabla \times \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1} \varepsilon_s \cdot [\nabla \times (\mu_s \bar{\boldsymbol{\mu}}^{-1} \cdot \mathbf{B})]\} - k_s^2 \mathbf{B} = 0. \quad (13)$$

把 (12) 式和 (8) 式代入 (13) 式中, 整理后可以得到如下方程:

$$\sum_{n,m} \bar{E}_{mn} [\tilde{d}_{mn} \mathbf{M}_{mn} + \tilde{c}_{mn} \mathbf{N}_{mn}] = 0, \quad (14)$$

其中系数 $\tilde{d}_{mn}$, $\tilde{c}_{mn}$ 的具体表达式见文献 [15]. 要让 (14) 式成立, 需要 $\tilde{d}_{mn} = 0$, $\tilde{c}_{mn} = 0$, 可以得到一个矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \tilde{p} & \bar{p} \\ \tilde{\zeta} & \bar{\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} = \lambda_l \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix}, \quad (15)$$

其中 $\lambda_l = \frac{k_s^2}{k^2}$,

$$\tilde{p}_{mn,uv} = \sum_{q,p} \frac{\bar{E}_{uv}}{\bar{E}_{mn}} (\bar{p}_{mn}^{pq} \tilde{g}_{pq}^{uv} + \tilde{p}_{mn}^{pq} \bar{c}_{pq}^{uv}),$$

$$\bar{p}_{mn,uv} = \sum_{q,p} \frac{\bar{E}_{uv}}{\bar{E}_{mn}} (\bar{p}_{mn}^{pq} \bar{g}_{pq}^{uv} + \tilde{p}_{mn}^{pq} \bar{c}_{pq}^{uv}),$$

$$\tilde{\zeta}_{mn,uv} = \sum_{q,p} \frac{\bar{E}_{uv}}{\bar{E}_{mn}} (\bar{o}_{mn}^{pq} \tilde{g}_{pq}^{uv} + \tilde{o}_{mn}^{pq} \bar{c}_{pq}^{uv}),$$

$$\bar{\zeta}_{mn,uv} = \sum_{q,p} \frac{\bar{E}_{uv}}{\bar{E}_{mn}} (\bar{o}_{mn}^{pq} \bar{g}_{pq}^{uv} + \tilde{o}_{mn}^{pq} \bar{c}_{pq}^{uv}). \quad (16)$$

各系数具体表达式见文献 [15]. mn, uv 分别表示矩阵的行和列; 用 l 来标注其对应的特征向量, 不同的 l 值意味着代表的特征值和特征向量不同. 特征值记为 λ_l , 其对应的特征向量可表示为 $(d_{mn,l}, c_{mn,l})^T$. 基于这些特征向量, 能够构建出一个新的函数 $\mathbf{V}_l$ [15]:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_l = -\frac{k_l}{\omega} \sum_{n,m} \bar{E}_{mn} [d_{mn,l} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) \\ + c_{mn,l} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r})], \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $k_l = \frac{k_s}{\sqrt{\lambda_l}}$. 可以将 $\mathbf{B}_l$ 表示为 [15]

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_l = -\sum_l \alpha_l \frac{k_l}{\omega} \sum_{n,m} \bar{E}_{mn} [d_{mn,l} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) \\ + c_{mn,l} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (18)$$

通过推导, 区域 2 内部的场分布可以描述为 [15]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(2)} = -i \sum_{n,m} \bar{E}_{mn} \sum_l \alpha_l \frac{k_l^2}{\varepsilon_s \mu_s \omega^2} [\bar{c}_{mn,l} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) \\ + \bar{d}_{mn,l} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) + \bar{\omega}_{mn,l} \mathbf{L}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r})] \\ - i \sum_l \alpha_l \frac{k_l^2}{\varepsilon_s \mu_s \omega^2} [\bar{\omega}_{00,l} \mathbf{L}_{00}^{(1)}(k_l, \mathbf{r})], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{t2} = & - \sum_{n,m} \bar{E}_{mn} \sum_l \alpha_l \frac{k_l}{\mu_s \omega} [\bar{d}_{mn,l} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) \\ & + \bar{c}_{mn,l} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) + \bar{w}_{mn,l} \mathbf{L}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r})] \\ & - \sum_l \alpha_l \frac{k_l \bar{w}_{00,l}}{\mu_s \omega} \mathbf{L}_{00}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (20)$$

埋地旋电磁各向异性球体上的初始入射波是穿过平面的透射波, 如 (5) 式表示, 可以展开成球矢量波函数的表达式^[13,15]:

$$\mathbf{E}^{i2} = -T \sum_{n,m} i \bar{E}_{mn} [p_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k_1, \mathbf{r}) + q_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_1, \mathbf{r})], \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{i2} = & - \frac{k_1}{\omega \mu_1} T \sum_{n,m} \bar{E}_{mn} [q_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k_1, \mathbf{r}) \\ & + p_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_1, \mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (22)$$

展开系数 p_{mn} 和 q_{mn} 分别为^[24]

$$p_{mn} = [p_\theta \tilde{\pi}_{mn}(\cos \theta) - i p_\phi \tilde{\pi}(\cos \theta)] e^{-im\phi}, \quad (23)$$

$$q_{mn} = [p_\theta \tilde{\pi}_{mn}(\cos \theta) - i p_\phi \tilde{\tau}_{mn}(\cos \theta)] e^{-im\phi}. \quad (24)$$

标准函数 $\tilde{\pi}_{mn}(\cos \theta)$ 和 $\tilde{\tau}_{mn}(\cos \theta)$ 的定义由文献^[24]给出, 其表达式如下:

$$\tilde{\pi}_{mn}(\cos \theta) = C_{mn} \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta), \quad (25)$$

$$\tilde{\tau}_{mn}(\cos \theta) = C_{mn} \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta), \quad (26)$$

其中, $P_n^m(x)$ 是连带勒让德函数. 同时, 区域 1 中地下埋藏旋电磁各向异性球体散射电磁场如下所示^[15]:

$$\mathbf{E}^{r2} = \sum_{n,m} i \bar{E}_{mn} [a_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(3)}(k_1, \mathbf{r}) + b_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(k_1, \mathbf{r})], \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{r2} = & \frac{k_1}{\omega \mu_1} \sum_{n,m} \bar{E}_{mn} [a_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(k_1, \mathbf{r}) \\ & + b_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(3)}(k_1, \mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (28)$$

根据电磁场在球表面 $r = a$ 处的切向连续性, 并利用勒让德函数的正交性, 可得到以下方程组^[15]:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\xi'_n(x)}{\psi'_n(x)} \right] a_{mn} + \sum_l \left[\frac{1}{m_s \bar{k}_l} \frac{\psi'_n(\bar{k}_l m_s x)}{\psi'_n(x)} d_{mn,l} \right] \alpha_l \\ + \sum_l \left[\frac{1}{m_s \bar{k}_l \lambda_l} \frac{j_n(\bar{k}_l m_s x)}{\psi'_n(x)} \bar{w}_{mn,l} \right] \alpha_l = p_{mn}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\left[\frac{\xi_n(x)}{\psi_n(x)} \right] b_{mn} + \sum_l \left[\frac{1}{m_s \bar{k}_l} \frac{\psi_n(\bar{k}_l m_s x)}{\psi_n(x)} c_{mn,l} \right] \alpha_l = q_{mn}, \quad (30)$$

$$\left[\frac{\xi_n(x)}{\psi_n(x)} \right] a_{mn} + \sum_l \left[\frac{\mu_1}{\mu_s} \frac{\psi_n(\bar{k}_l m_s x)}{\psi_n(x)} \bar{d}_{mn,l} \right] \alpha_l = p_{mn}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\xi'_n(x)}{\psi'_n(x)} \right] b_{mn} + \sum_l \left[\frac{\mu_1}{\mu_s} \frac{\psi'_n(\bar{k}_l m_s x)}{\psi'_n(x)} \bar{c}_{mn,l} \right] \alpha_l \\ + \sum_l \left[\frac{\mu_1 j_n(\bar{k}_l m_s x)}{\mu_s \psi'_n(x)} \bar{w}_{mn,l} \right] \alpha_l = q_{mn}, \end{aligned} \quad (32)$$

其中, 电尺寸参数定义为 $x = |k_1 a|$, 并且定义 $m_s = k_s/k_1$, $\bar{k}_l = k_l/k_s$, $m_s \bar{k}_l = k_l k_1$, $\bar{k}_l m_s x = k_l a$. Riccati-Bessel 函数 $\Psi_n(z)$ 和 $\xi_n(z)$ 可以表示为: $\Psi_n(z) = z j_n(z)$, $\xi_n(z) = z h_n^{(1)}(z)$, 其中 $j_n(kr)$ 和 $h_n^{(1)}(kr)$ 分别表示第一类和第三类的球贝塞尔函数.

详细的求解过程已在文献^[15]中给出. 通过求解 (29)–(32) 式, 可以得到散射系数 a_{mn} 和 b_{mn} . 在区域 1 中, 反射波 $\mathbf{E}^{r2}$ 和 $\mathbf{H}^{r2}$ 沿着 $-z$ 方向向界面传播. 根据镜像理论^[8], 平面上的反射和透射波在 $z = -d$ 处的表达式如下所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{r3} = & \sum_{n,m} i \bar{E}_{mn} [a_{mn}^r \mathbf{N}_{mn}^{(3)}(k_1, \mathbf{r}_{\text{img}}) \\ & + b_{mn}^r \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(k_1, \mathbf{r}_{\text{img}})], \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{r3} = & \frac{k_1}{\omega \mu_1} \sum_{n,m} \bar{E}_{mn} [a_{mn}^r \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(k_1, \mathbf{r}_{\text{img}}) \\ & + b_{mn}^r \mathbf{N}_{mn}^{(3)}(k_1, \mathbf{r}_{\text{img}})], \end{aligned} \quad (34)$$

$$\mathbf{E}^{t3} = \sum_{n,m} i \bar{E}_{mn} [a_{mn}^t \mathbf{N}_{mn}^{(3)}(k_0, \mathbf{r}) + b_{mn}^t \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(k_0, \mathbf{r})], \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{t3} = & \frac{k_0}{\omega \mu_0} \sum_{n,m} \bar{E}_{mn} [a_{mn}^t \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(k_0, \mathbf{r}) \\ & + b_{mn}^t \mathbf{N}_{mn}^{(3)}(k_0, \mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (36)$$

正如 Nasr 等^[12]所示, 各向异性介质球的散射波在平面上的反射可以等效为各向异性介质球的镜像球对该平面波的散射 (镜像法), 其地面反射场在镜像坐标系 (局部坐标系) 中的场分量 $\mathbf{E}^{r3}$ 以 $(r_{\text{img}}, \theta_{\text{img}}, \phi_{\text{img}})$ 表示, 而在全局坐标系中, 各向异性介质球的散射场透过地平面的场分量 $\mathbf{E}^{t3}$ 以 (r, θ, ϕ) 表示. 局部坐标系的原点位于镜像球体的中心, 如图 2 所示. 假设自由空间的磁导率 μ_0 和各向同性导电介质的磁导率 μ_1 都为 1. 在平面上点 P 处存在 $r = r_{\text{img}} = d$, $\theta = \pi$, $\theta_{\text{img}} = 0$, $\phi = \phi_{\text{img}} = 0$. 最终得到由透射系数 a_{mn}^t , b_{mn}^t 和反射系数 a_{mn}^r , b_{mn}^r 组成的矩阵, 具体表达式如下所示:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} n_{mn}(\pi, 0) R_n^{(3)}(k_0 d) & m_{mn}(\pi, 0) h_n^{(1)}(k_0 d) & -n_{mn}(0, 0) R_n^{(3)}(k_1 d) & -m_{mn}(0, 0) h_n^{(1)}(k_1 d) \\ m_{mn}(\pi, 0) R_n^{(3)}(k_0 d) & -n_{mn}(\pi, 0) h_n^{(1)}(k_0 d) & -m_{mn}(0, 0) R_n^{(3)}(k_1 d) & n_{mn}(0, 0) h_n^{(1)}(k_1 d) \\ \frac{k_0}{k_1} m_{mn}(\pi, 0) h_n^{(1)}(k_0 d) & \frac{k_0}{k_1} n_{mn}(\pi, 0) R_n^{(3)}(k_0 d) & -m_{mn}(0, 0) h_n^{(1)}(k_1 d) & -n_{mn}(0, 0) R_n^{(3)}(k_1 d) \\ -\frac{k_0}{k_1} n_{mn}(\pi, 0) h_n^{(1)}(k_0 d) & \frac{k_0}{k_1} m_{mn}(\pi, 0) R_n^{(3)}(k_0 d) & n_{mn}(0, 0) h_n^{(1)}(k_1 d) & -m_{mn}(0, 0) R_n^{(3)}(k_1 d) \end{bmatrix} \\
 & \times \begin{bmatrix} a_{mn}^t \\ b_{mn}^t \\ a_{mn}^r \\ b_{mn}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{mn} n_{mn}(\pi, 0) R_n^{(3)}(k_1 d) + b_{mn} m_{mn}(\pi, 0) h_n^{(1)}(k_1 d) \\ a_{mn} m_{mn}(\pi, 0) R_n^{(3)}(k_1 d) - b_{mn} n_{mn}(\pi, 0) h_n^{(1)}(k_1 d) \\ a_{mn} m_{mn}(\pi, 0) h_n^{(1)}(k_1 d) + b_{mn} n_{mn}(\pi, 0) R_n^{(3)}(k_1 d) \\ -a_{mn} n_{mn}(\pi, 0) h_n^{(1)}(k_1 d) + b_{mn} m_{mn}(\pi, 0) R_n^{(3)}(k_1 d) \end{bmatrix}. \quad (37)
 \end{aligned}$$

其中, $m_{mn}(\theta, \phi)$ 和 $n_{mn}(\theta, \phi)$ 表达式如下^[13]:

$$m_{mn}(\theta, \phi) = \frac{imP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} e^{im\phi}, \quad (38)$$

$$n_{mn}(\theta, \phi) = \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} e^{im\phi}. \quad (39)$$

利用加法定理^[20], 可以将反射波 $\mathbf{E}^{r3}$ 从局部坐标系转换到全局坐标系, 其具体形式如下:

$$\mathbf{E}^{r3'} = \sum_{n,m} i\bar{E}_{mn} \left[c_{mn}^r \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k_1, \mathbf{r}) + d_{mn}^r \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_1, \mathbf{r}) \right]. \quad (40)$$

根据加法定理, 可以展开 3 个向量 $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ 和 $\mathbf{r}''$ 之间的关系, 其具体形式如下所示^[19]:

$$\mathbf{M}_{nm}^{(1)}(k_1, \mathbf{r}) = \sum_{vu} [A_{nm,vu} \mathbf{M}_{vu}^{(1)}(k_1, \mathbf{r}') + B_{nm,vu} \mathbf{N}_{vu}^{(1)}(k_1, \mathbf{r}')], \quad (41)$$

$$\mathbf{N}_{nm}^{(1)}(k_1, \mathbf{r}) = \sum_{vu} [A_{nm,vu} \mathbf{N}_{vu}^{(1)}(k_1, \mathbf{r}') + B_{nm,vu} \mathbf{M}_{vu}^{(1)}(k_1, \mathbf{r}')], \quad (42)$$

其中 $A_{nm,vu}$ 和 $B_{nm,vu}$ 表示加法定理的变换系数, 可以通过递归方法求得具体值^[20]. 将 (41) 式和 (42) 式代入 (40) 式, 并与式 (33) 式进行比较, 可以推导出展开系数 c_{mn}^r 和 d_{mn}^r 的矩阵形式如下:

$$\begin{bmatrix} c_{mn}^r & d_{mn}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{vu} [A_{nm,vu} \mathbf{N}_{vu}^{(1)}(k_1, \mathbf{r}') + B_{nm,vu} \mathbf{M}_{vu}^{(1)}(k_1, \mathbf{r}')] \\ \sum_{vu} [A_{nm,vu} \mathbf{M}_{vu}^{(1)}(k_1, \mathbf{r}') + B_{nm,vu} \mathbf{N}_{vu}^{(1)}(k_1, \mathbf{r}')] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{nm}^r & b_{nm}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{nm}^{(3)}(k_1, \mathbf{r}_{\text{img}}) \\ \mathbf{M}_{nm}^{(3)}(k_1, \mathbf{r}_{\text{img}}) \end{bmatrix}. \quad (43)$$

求解系数 c_{mn}^r 和 d_{mn}^r , 将其代入 (40) 式, 进一步推导出全局坐标系中的反射电场. 从 (21)—(33) 式进行迭代, 直到在点 P 处收敛. P 点电场的计算表达式表示如下:

$$E_P = E^{\text{t1}} + \sum_n E^{r,n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (44)$$

为了计算沿 Y 轴一条直线上的电场分布, 首先确定图 2 中所示的固定点 P 处的电场. 这个过程从计算方程 (29)—(32), 获得一系列的散射系数 a_{mn} 和 b_{mn} 开始, 然后通过一系列计算, 结合镜像方法、球面矢量波函数的加法定理和边界条件, 推导出点 P 处的电场. 在此基础上, 利用在点 P 处的电场, 计算出方程 (27) 和 (28) 中电场系数 a_{mn} 和

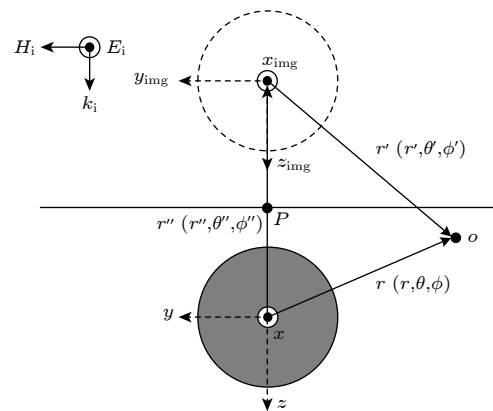


图 2 加法定理中 $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ 和 $\mathbf{r}''$ 之间的关系

Fig. 2. Connections among $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ and $\mathbf{r}''$ in the additive theorem.

b_{mn} . 最后, 通过得到的系数 a_{mn} 和 b_{mn} , 结合位置坐标 (r, θ, ϕ) 变化, 可以利用方程 (27) 和 (28) 计算平面上沿 Y 轴不同位置的电场分布. 这一系统化的方法能够准确描述沿 L 线的电场变化, 为全面理解不同位置的电场分布提供了依据, 同时有助于深入探索复杂地下环境中的散射特性.

3 结果与讨论

在本文的数值分析中, 选取了地平面上沿 Y 轴直线 $L(0, y, -d)$ 上的多个离散点, 计算了各点的电场强度, 其中 y 的取值范围为 $-20 \sim 20$ m. 计算工作在一台配备 Intel(R) Core(TM) i7-1360P 处理器和 32 GB 内存的笔记本电脑上完成, 基于上部分推导得到的公式, 采用 FORTRAN 编写程序实现了电场分布的计算, 同时给出了 FEKO 仿真的结果, FEKO 具体仿真图如图 3 所示. 其中 $U/V/N$ 是局部坐标系, 分别对应水平方向、垂直方向和法向方向, 类似于局部坐标系中的 $X/Y/Z$ 轴. 埋地旋电磁各向异性球体的介电常数和磁导率分别设定为 $\varepsilon_t = 15, \varepsilon_g = 2, \varepsilon_s = \varepsilon_0, \mu_t = 8, \mu_g = 1, \mu_s = \mu_0$, 区域 1 的相对介电常数设为 $\varepsilon_{r1} = 3$, 相对磁导率 $\mu_{r1} = 1$, 电导率 σ_1 为 0.002 S/m. 旋电磁各向异性介质球半径 a 为 10 m. 上述这些参数设置在下面分析中保持不变.

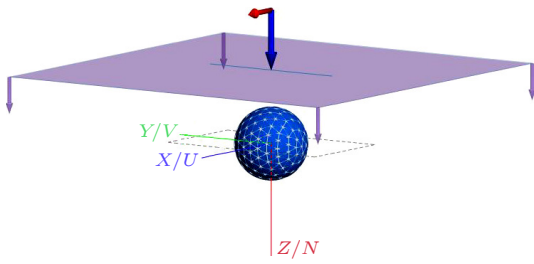


图 3 FEKO 仿真图

Fig. 3. FEKO simulation plot.

通过改变入射波频率 f 和埋藏深度 d , 得到了相应的计算结果和 FEKO 仿真数据, 如图 4—图 6 所示. 此外, 针对不同参数特性, 计算了球矢量波函数解析解与 FEKO 仿真结果的计算时间, 具体参数如表 1 所列. 结果表明, 所提出的球矢量波函数方法在计算时间上显著优于 FEKO 仿真, 充分体现了该方法在处理特定散射问题时的高效性.

图 4 展示了平面上沿 Y 轴直线 L 的电场强度分布, 对比了本文提出的球矢量波函数解析解结果

与 FEKO 仿真数据. 图中的折线代表本文球矢量波函数解析解 (下文简称解析解) 的计算结果, 散点则对应 FEKO 仿真结果. 图 4 的具体参数设置如下: 入射波频率 f 为 40 kHz, 埋藏深度 d 为 20 m.

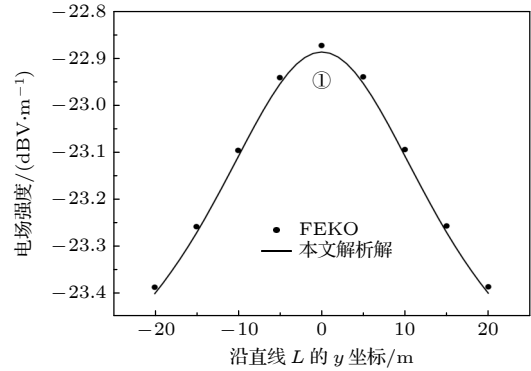


图 4 沿 Y 轴直线 L 的电场分布对比

Fig. 4. Comparison of electric field distributions along line L on the Y -axis.

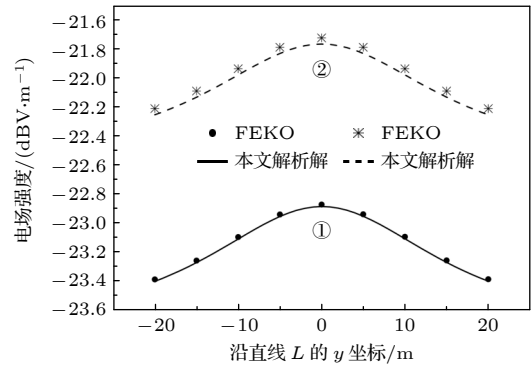


图 5 不同入射波频率下沿 Y 轴直线 L 的电场分布对比, 曲线①频率 $f = 40$ kHz, 曲线②频率 $f = 50$ kHz

Fig. 5. Comparison of electric field distributions along line L on the Y -axis at different incident wave frequencies. Curve 1: $f = 40$ kHz, Curve 2: $f = 50$ kHz.

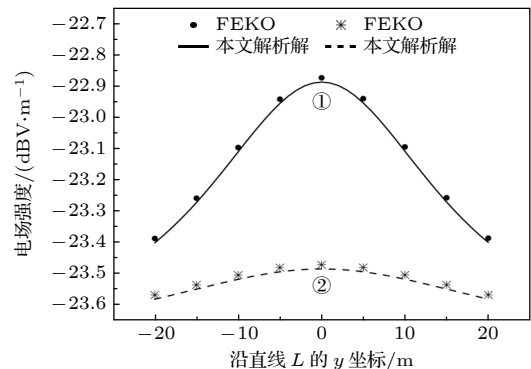


图 6 不同埋藏深度下沿 Y 轴直线 L 的电场分布对比, 曲线①埋藏深度 $d = 20$ m, 曲线②埋藏深度 $d = 30$ m

Fig. 6. Comparison of electric field distributions along line L on the Y -axis at different burial depths. Curve 1: $d = 20$ m, Curve 2: $d = 30$ m.

表 1 在不同参数设置下解析解与 FEKO 仿真的计算效率比较

Table 1. Computation time comparison of analytical solution vs. FEKO simulation under various parameter settings.

Case	f/kHz	d/m	解析解/s	FEKO/h	图
1	40	20	30.52	12.16	图4①
2	50	20	34.64	13.38	图5②
3	40	30	36.41	13.87	图6②

由图 4 可见, 解析解与 FEKO 仿真结果符合较好, 平均相对误差为 0.059%, 验证了所提解析解的正确性. 电场强度在 $y = 0$ 处达到最大值, 并随着距离增大呈现对称性减小的趋势, 反映出球体附近电场分布的局部增强特性.

图 5 展示了入射波频率分别为 $f = 40 \text{ kHz}$ 和 $f = 50 \text{ kHz}$ 时, 平面上沿 Y 轴直线 L 的电场强度分布对比, 埋藏深度设置为 $d = 20 \text{ m}$. 曲线①表示频率 $f = 40 \text{ kHz}$ 时的电场分布, 其中黑色实线为本文解析解结果, 黑色实心圆点为 FEKO 仿真结果; 曲线②表示频率 $f = 50 \text{ kHz}$ 时的电场分布, 其中黑色虚线为本文解析解结果, 黑色星号为 FEKO 仿真结果.

随着入射波频率的增大, 电场强度整体呈上升趋势. 这种变化是由于在旋电磁各向异性介质球半径不变的情况下, 随着入射波的频率增大, 球目标的电尺寸随之增大, 这样所得的散射场的场强也随之增大. 从图 5 可以看出, 本文提出的解析解与 FEKO 仿真结果在不同频率下均保持高度一致. 低频 $f = 40 \text{ kHz}$ (曲线①) 和 高频 $f = 50 \text{ kHz}$ (曲线②) 条件下的平均相对误差分别为 0.059% 和 0.078%. 这表明, 本文方法在不同频率下具有良好的准确性和适用性.

图 6 展示了不同埋藏深度下沿 Y 轴直线 L 的电场强度分布对比, 入射波频率设为 $f = 40 \text{ kHz}$. 其中, 曲线①表示埋藏深度 $d = 20 \text{ m}$, 黑色实线为本文提出的解析解的结果, 黑色圆点为 FEKO 仿真结果; 曲线②表示埋藏深度 $d = 30 \text{ m}$, 黑色虚线为本文解析解结果, 黑色星号为 FEKO 仿真结果.

由图 6 可以看出, 随着埋藏深度的增大, 电场强度整体呈现减弱趋势, 并且最大值与最小值之间的差异显著减小, 这是因为埋地深度的增大, 各向异性介质球散射场回到地面的距离变长, 其场强也就相应地减小. 深埋时电场分布更加平滑, 局部的

波峰和波谷特性逐渐消失. 这主要是由于电磁波在传播过程中受到介质吸收, 能量随深度增大发生明显衰减, 同时散射波与入射波的干涉效应减弱, 导致电场分布的局部增强特性逐渐平滑化. 本文提出的解析解与 FEKO 仿真结果在不同埋藏深度条件下均保持高度一致, 浅埋 $d = 20 \text{ m}$ (曲线①) 和深埋 $d = 30 \text{ m}$ (曲线②) 条件下的平均相对误差分别为 0.059% 和 0.056%, 误差极小, 充分验证了解析方法的准确性和可靠性.

4 结 论

本文给出了一种针对地下旋电磁各向异性介质球电磁散射问题的解析解方法, 结合 T 矩阵法、镜像法和球矢量波函数及其加法定理, 分析了地面上平行于球轴、沿 Y 轴的直线 L 上电场强度的分布. 和已有方法相比, 有以下特点: 首先, 在计算地下特定目标 (各向异性介质球) 的散射特性时, 球矢量波函数解析解结果与 FEKO 仿真结果高度一致, 计算效率显著提高, 验证了所提出的球矢量波函数方法在处理特定模型的准确性和高效性. 其次, 本文系统分析了入射波频率 f 以及埋藏深度 d 对电场强度分布的影响, 结果表明, 所提方法在处理不同物理参数变化时展现出较强的灵活性与适应性. 与传统解析方法 [12–14] 仅能计算单点电场强度不同, 本文方法实现了平面上沿 Y 轴直线的电场分布计算, 显著拓展了计算范围, 提供了更为全面的电场空间分布信息. 最后需要说明的是: 本文的方法目前主要针对旋电磁各向异性介质球, 假设主轴平行于 z 轴, 且相关矩阵是基于这一假设构建的. 未来的研究可以进一步探讨如何将该方法推广到任意各向异性球体的散射问题, 并详细分析当主轴不平行于 z 轴时的计算方法. 此外, 本文所给出的矢量波函数方法目前主要适用于规则几何形状, 对于复杂几何结构或多层介质, 其适用性仍存在一定的局限性. 未来的研究还可以扩展该方法的适用范围, 针对复杂几何形状及多层介质结构中的电磁散射问题开展深入研究, 进一步提高方法的计算精度与应用广度, 以满足更复杂工程场景的需求.

参考文献

- [1] Rao Z N, Zhu G Q, He S Y, Li C, Yang Z W, Liu J 2022 *Remote Sens.* **14** 764

- [2] Wang X F, Wang P, Zhang X T, Wan Y D, Shi H D, Liu W 2022 *IEEE Sens. J.* **22** 13835
- [3] Wang L J, Zhang S, Chen S D, Luo C P 2022 *Sensors* **22** 1648
- [4] Durach M 2023 *Appl. Sci.* **13** 5169
- [5] Zhang H W, Huang X W, Sheng X Q 2022 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **70** 8204
- [6] Wang J, Li J, Chen Y, Han F, Liu Q H 2020 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **68** 6473
- [7] Shi J K, Wang F, Zhang D M, Huang H W, Wu Y 2023 *Tunn. Undergr. Space Technol.* **140** 105312
- [8] Wang K C, Liu J, Xu J H 2022 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **134** 139
- [9] Jiang X, Duan X 2022 *J. Sci. Comput.* **90** 34
- [10] Amor-Martin A, Garcia-Castillo L E 2021 *Appl. Sci.* **11** 3683
- [11] Zamani H, Tavakoli A, Dehmollaian M 2018 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **66** 347
- [12] Nasr M A, Eshrah I A, Hashish E A 2014 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **62** 2702
- [13] Zhang X X, Geng Y L, Cheng Z Q 2020 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **68** 3313
- [14] Geng Y L, Wu L J, Zhang P Q 2020 *Proceedings of the 2020 Cross Strait Radio Science & Wireless Technology Conference (CSRSWTC)* Fuzhou, China, December 13–16, 2020 p1
- [15] Li J L W, Ong W L, Zheng K H 2012 *Phys. Rev. E* **85** 036601
- [16] Fan J Y, Zhang Y X, Feng X L, Huang Z X 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 244101 (in Chinese) [樊久扬, 张玉贤, 冯晓丽, 黄志祥 2024 物理学报 **73** 244101]
- [17] Yang L J, Lv Z P, Gao S W, Zheng F Y, Liu B 2024 *J. Shenyang Univ. Tech.* **46** 97 (in Chinese) [杨理践, 吕志鹏, 高松巍, 郑福印, 刘斌 2024 沈阳工业大学学报 **46** 97]
- [18] Zhou J J 2022 *Ph. D. Dissertation* (Wuhan: China University of Geosciences) (in Chinese) [周君君 2022 博士学位论文 (武汉: 中国地质大学)]
- [19] Ma H 2023 *J. Mine Automat.* **49** 75 (in Chinese) [马虎 2023 工矿自动化 **49** 75]
- [20] Wang Y M, Chew W 1993 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **41** 1633
- [21] Feng M, Huang Z Y, Fang J P, Liu Y 2024 *J. Guidance Fuse* **45** 32 (in Chinese) [冯明, 黄志勇, 方金鹏, 刘洋 2024 制导与引信 **45** 32]
- [22] Chen X M, Li H Y, Wu T, Meng X S, Li F X 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 100302 (in Chinese) [陈鑫森, 李海英, 吴涛, 孟祥帅, 黎凤霞 2023 物理学报 **72** 100302]
- [23] Geng Y, Lu T, Zhang P 2022 *Proceedings of the 2022 International Applied Computational Electromagnetics Society Symposium (ACES-China)* Xuzhou, China, December 9–12, 2022 p1
- [24] Lin Z, Chui S T 2004 *Phys. Rev. E* **69** 056614

Application of spherical vector wave function to electromagnetic scattering from a buried gyrotropic anisotropic sphere^{*}

JIA Yongbing¹⁾ GENG Youlin^{1)2)†}

¹⁾ (*College of Electronics and Information, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China*)

²⁾ (*Jiashan Institute of Hangzhou Dianzi University, Jiashan 314100, China*)

(Received 30 December 2024; revised manuscript received 31 March 2025)

Abstract

The electromagnetic scattering of buried gyrotropic anisotropic media is crucial for resource exploration and environmental monitoring. However, the existing analytical solutions for electromagnetic scattering of a gyrotropic anisotropic sphere are primarily limited to free-space cases due to computational complexity. To address this limitation, an analytical solution that combines spherical vector wave functions (SVWFs), the T-matrix method, the image method, and the addition theorem of SVWFs is proposed in this work. The proposed method is detailed as follows. The transmitted field of a vertically incident plane wave transmitting through the ground serves as the first incident field on the gyrotropic anisotropic sphere, which can be expanded in terms of SVWFs. Using the analytical solution for a gyrotropic anisotropic sphere in free space, expressions for the internal electromagnetic field are derived. Based on the orthogonality of the SVWFs in the surface of the buried gyrotropic anisotropic sphere, the first scattered field is obtained. This scattered field then acts as the incident field on the ground, and its reflection is calculated using the image method. The reflected field can then serve as the secondary incident field for the dielectric sphere, and this process is repeated iteratively until the field components on the ground converge.

Unlike the existing methods of computing the field at a fixed point for buried homogeneous cylinder or isotropic sphere, the proposed method computes the electric field distribution along a line L on the ground, which is parallel to both the Y -axis and the sphere's central axis. The comparison of the results from the proposed method with FEKO simulation results shows their excellent agreement with each other, with an average relative error below 0.1%, thereby validating the correctness of the proposed analytical solution. Moreover, compared with FEKO simulation method, the proposed analytical method indicates a significant advantage in computational efficiency. Using the analytical model established in this work, the influence of incident wave frequency, buried depth and other parameters on the distribution of electric field along the Y -axis is also analyzed in detail. These findings provide practical value for enhancing the accuracy of geological exploration and the reliability of environmental monitoring.

Keywords: buried gyrotropic anisotropic sphere, electromagnetic scattering, spherical vector wave function, T-matrix method

PACS: 41.20.-q, 02.70.-c

DOI: [10.7498/aps.74.20241789](https://doi.org/10.7498/aps.74.20241789)

CSTR: [32037.14.aps.74.20241789](https://cstr.cn/32037.14.aps.74.20241789)

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 62141409).

[†] Corresponding author. E-mail: gengyoulin@aliyun.com

球矢量波函数在地下旋电磁各向异性介质球电磁散射中的应用

贾永冰 耿友林

Application of spherical vector wave function to electromagnetic scattering from a buried gyrotropic anisotropic sphere

JIA Yongbing GENG Youlin

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 124101 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20241789

CSTR: 32037.14.aps.74.20241789

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20241789>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

双零阶贝塞尔波束的传播及对单轴各向异性球的散射特性

Propagation of double zero-order Bessel beam and its scattering properties to uniaxial anisotropic spheres

物理学报. 2022, 71(18): 180301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220491>

基于混合场积分方程的半空间上方金属目标电磁散射特性高效分析

High-efficient analysis of metal target electromagnetics above the half-space based on mixed field integral equation

物理学报. 2022, 71(11): 114101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212152>

用于分析单轴/双轴双各向异性媒质电磁特性的快速传输矩阵法

Rapid-transfer matrix method for analyzing electromagnetic properties of uniaxial/biaxial bianisotropic media

物理学报. 2024, 73(24): 244101 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20241346>

电磁偏置各向异性石墨烯界面的传播矩阵

Propagation matrix for electromagnetic interaction through electrostatically and magnetostatically biased graphene sheet

物理学报. 2021, 70(1): 014102 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201089>

电子温度各向异性对螺旋波等离子体中电磁模式的传播及功率沉积特性的影响

Influence of electron temperature anisotropy on wave mode propagation and power deposition characteristics in helicon plasma

物理学报. 2023, 72(5): 055202 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222048>

褶皱状单层GeSe各向异性的能带漏斗效应

Anisotropic energy funneling effect in wrinkled monolayer GeSe

物理学报. 2024, 73(23): 236801 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20241155>