

## 封面文章

## 分形子模型中的彩虹伤痕态\*

谢岩骏<sup>1)2)3)</sup> 戴汉宁<sup>1)2)3)†</sup>

1) (中国科学技术大学, 合肥微尺度物质科学国家研究中心, 合肥 230026)

2) (中国科学技术大学, 中国科学院量子信息与量子科技创新研究院, 上海量子科学研究中心, 上海 201315)

3) (合肥国家实验室, 合肥 230088)

(2025 年 1 月 15 日收到; 2025 年 3 月 11 日收到修改稿)

量子多体伤痕态的弱遍历性动力学与本征态热化假说相悖, 在淬火动力学中局域可观测量出现周期振荡. 这种现象通常与伤痕态二分纠缠熵的亚体积定律有关. 纠缠熵呈现出异常值, 与能谱主体相分离. 本文使用精确对角化的方法数值模拟了准一维分形子模型中的彩虹伤痕态, 该态由一系列远距离的四体纠缠组成, 依次分布于中心对称的四个格点, 其二分纠缠熵遵循体积定律. 研究发现该态在未与能谱主体分离的情况下, 表现出了弱热化现象. 当引入横场破坏模型的子系统对称性后, 弱热化特性随即消失. 进一步地, 在分形子模型中提出了彩虹伤痕态的制备方案, 通过调制局域的四体交换相互作用和  $\hat{\sigma}^z$  门, 从尼尔态出发, 实现了高保真度的态制备. 分析相互作用的强度噪声影响, 该方案表现出一定的鲁棒性. 本文证明了分形子模型中彩虹伤痕态的存在, 为非平衡量子系统中弱热化的研究提供了新的途径.

关键词: 四体相互作用, 分形子模型, 多体伤痕态

PACS: 03.65.Ud, 03.65.Vf, 03.67.Bg, 42.50.Dv

DOI: 10.7498/aps.74.20250061

CSTR: 32037.14.aps.74.20250061

## 1 引言

非平衡量子多体系统的热化问题在凝聚态物理和量子信息科学领域具有重要的研究价值<sup>[1-3]</sup>. 对于不可积量子多体系统, 通常借助本征态热化假说 (eigenstate thermalization hypothesis, ETH) 描述系统的热化过程: 热化后量子态的局域可观测量由与其能量一致的微正则系综决定, 使得演化后的量子态与热系综之间无法通过局域测量进行区分<sup>[4,5]</sup>. 尽管 ETH 在许多数值分析和实验中得到了验证, 但并非适用于所有情况, 可积的量子多体系统<sup>[6,7]</sup>和多体局域化的量子相<sup>[8,9]</sup>就是两个典型的反例.

理论和实验研究发现了一类新的违反 ETH 的动力学过程. 例如, 在 Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki 自旋链<sup>[10]</sup>、PXP 模型<sup>[11]</sup>和自旋-1 的 XY 模型<sup>[12]</sup>中, 一些特殊初态在淬火动力学下呈现出弱热化现象, 称为量子多体伤痕 (quantum many-body scar). 这些初态被称为量子多体伤痕态, 通常位于能谱的中部, 由等间隔的本征激发态组成. 这些初态的二分纠缠熵 (bipartite entanglement entropy) 呈现出亚体积定律  $S \propto \log L$ , 与能谱主体中的各个本征态纠缠熵明显分离, 以异常值存在于本征能谱中<sup>[13-15]</sup>. 彩虹伤痕态 (rainbow scar) 的出现进一步加深了人们对多体伤痕态的理解<sup>[16-22]</sup>, Langlett 等<sup>[16]</sup>指出, 彩虹伤痕态在保持简单纠缠结构的同时, 具备大量的二分纠缠熵, 满足独特的体积定律  $S \propto L$ .

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12074367)、国家重点研发计划 (批准号: 2020YFA0309804, 2023YFC2206200)、上海市市级科技重大专项 (批准号: 2019SHZDZX01) 和科技创新 2030—“量子通信与量子计算机”重大项目 (批准号: 2021ZD0302002) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: daihan@ustc.edu.cn

关系. 该态由大量长程的爱因斯坦-波多尔斯基-罗森 (EPR) 纠缠对构成. 由于 EPR 对具有最大纠缠的特性, 该态的纠缠熵与能谱中其他本征态显著分离, 成为彩虹伤痕态存在的证据之一<sup>[23,24]</sup>.

彩虹伤痕态为各类非平衡量子系统的弱热化问题研究提供了全新的工具, 其概念最初被提出用于研究自旋-1/2 的 XYZ 模型<sup>[16]</sup>. 随后 Wildeboer 等<sup>[17]</sup> 将其推广至双层的海森伯模型、玻色哈伯德模型和费米哈伯德模型, 并系统分析了其在这类模型中的能级组成与最大纠缠特性. 此外, 通过在海森伯模型中引入外磁场噪声, 文献<sup>[18, 25]</sup> 进一步探讨了多体局域化现象与彩虹伤痕态之间的联系. 近年来, 分形子模型由于具有独特的拓扑特性<sup>[26-29]</sup> 在量子信息科学和凝聚态物理中引起了广泛的关注<sup>[30-32]</sup>. 该模型的子系统对称性极大地限制了粒子的运动, 阻碍热平衡的建立, 从而导致了一系列新奇的非平衡动力学过程, 例如, 在三维系统中的玻璃态动力学<sup>[33,34]</sup> 以及低维系统中的各类避免热化过程<sup>[24,35-37]</sup>, 其中态空间破碎化现象分别在二维和二维倾斜的费米哈伯德模型中得到实验观测和验证<sup>[38-40]</sup>. 当前, 该领域的重要研究方向之一是在分形子模型中寻找并构造多体伤痕态<sup>[35,36,41]</sup>. 为此, 本文利用彩虹伤痕态这一新颖工具, 研究其在模型中的能级组成、纠缠特性和动力学行为, 从而为理解分形子模型的弱热化过程提供新的视角.

本文对分形子模型中的彩虹伤痕态进行研究. 模型基于四体交换相互作用, 具备子系统  $\hat{U}(1)$  对称性和时间反演对称性. 在准一维的梯子晶格中, 我们提出由远距离四体 GHZ 态 (Greenberger-Horne-Zeilinger state) 组成的彩虹伤痕态 (图 1(a)). 该态由一系列高能激发态构成, 二分纠缠熵遵循体积定律. 通过 Python 的 QuSpin 库计算本征能谱的纠缠熵<sup>[42]</sup>, 发现该模型下, 彩虹伤痕态并未和能谱的主体分离, 却在淬火动力学中展现出弱热化的动力学特性. 保真度随时间演化产生周期振荡, 证明出现了违反 ETH 的现象. 引入横场破坏子系统的对称性后, 弱热化特性随即消失. 此外, 本文在分形子模型中提出制备彩虹伤痕态的理论方案 (图 1(b)), 通过调制局域四体交换相互作用和  $\hat{\sigma}^z$  门实现高保真度的态制备. 对过程中相互作用的强度噪声进行分析, 证明方案具备一定的鲁棒性.

## 2 理论模型

在链长为  $L$  的准一维梯子晶格中, 每个格点由一个自旋为 1/2 的粒子占据, 假定  $L$  为偶数, 系统的总自旋为 0. 如图 1(a) 所示, 参考文献<sup>[16]</sup> 的方式, 可以将晶格从中间均匀地分为两个长度相等的子空间:  $A = \{(j) | j = 1, \dots, L\}$  和  $B = \{(j) | j = L+1, \dots, 2L\}$ , 其中指标为奇数和偶数的格点分别代表梯子晶格的上下两条链, 哈密顿量具有如下的形式:

$$\hat{H} = \hat{H}_A \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{H}_B + \hat{H}_{AB}, \quad (1)$$

式中  $\hat{H}_{A(B)}$  为两个子空间  $A(B)$  的哈密顿量, 假定  $A$  和  $B$  具备中心对称性  $\hat{H}_B = \pm \mathcal{M} \hat{H}_A \mathcal{M}$ , 其中  $\mathcal{M}$  为中心对称算符, 将格点  $j$  映射为  $2L - j + 1$ .  $\hat{H}_{AB}$  将两个子空间相连接. 本文考虑哈密顿量为四体相互作用 ( $\hat{\mathcal{R}} = -J_R \hat{S}_1^+ \hat{S}_2^- \hat{S}_3^- \hat{S}_4^+ + \text{h.c.}$ ) 的分形子模型<sup>[43]①</sup>, 哈密顿量写作:

$$\hat{H}_A = \sum_i -J_i \hat{S}_{2i+1}^+ \hat{S}_{2i+2}^- \hat{S}_{2i+3}^- \hat{S}_{2i+4}^+ + \text{h.c.},$$

$$\hat{H}_{AB} = -J_{AB} \hat{S}_{L-1}^+ \hat{S}_L^- \hat{S}_{L+1}^- \hat{S}_{L+2}^+ + \text{h.c.} \quad (2)$$

模型具备全局的时间反演对称性  $\hat{\mathcal{T}} = \mathcal{K} i \hat{\sigma}^y$  和子系统的  $\hat{U}(1) = \prod_{j \in \{\text{row/col}\}} e^{i \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_j^z}$  对称性<sup>[44]</sup>. 全局时间反演对称性禁止了自旋的极化, 在外磁场存在的情况下会自发地被破坏. 子系统  $\hat{U}(1)$  对称性保证了晶格的任何一行或列保持总的  $\hat{S}^z$  不变. 单个的四体相互作用已经在超冷原子<sup>[45,46]</sup> 和超导比特<sup>[47]</sup> 平台中实现, 通过周期性调制理论可以等效地实现哈密顿量  $\hat{H}$ . 假定  $J_i = J_{AB} = 1$ , 由于子系统  $\hat{U}(1)$  对称性, 分形子模型中存在一些特殊的避免热化的量子态, 例如, 对于畴壁态  $|010101\dots\rangle$ , 每一行的总自旋  $\sum_{\text{row}} \hat{S}_i^z = \pm L/2$ , 子系统对称性导致的态空间破碎现象<sup>[38-40,48]</sup>, 使对应的破碎空间仅包含这一个态, 因而在演化中避免热化. 然而对于  $\sum_{\{\text{row/col}\}} \hat{S}_i^z = 0$ , 即每行和每列的总自旋均为 0 的情况, 破碎空间维度与系统尺寸呈现指数关系<sup>[49]</sup>. 在这个破碎空间中构建彩虹伤痕态:

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{2^{L/4}} \prod_{i \in \text{even}} \left[ 1 + (-1)^{(i/2+1)} \hat{S}_{i+1}^+ \hat{S}_{i+2}^- \hat{S}_{2L-i}^- \hat{S}_{2L-i-1}^+ \right] |0110\rangle, \quad (3)$$

① 分形子模型仅在二维以上的几何空间中存在有能隙的拓扑序<sup>[43]</sup>

式中直积的每一项均为四体 GHZ 态 (图 1(a) 中的  $|I\rangle$  或  $|Z\rangle$ )。得到的彩虹伤痕态  $|\psi_S\rangle$  布局在分形子模型高能激发态上, 由  $E = 0$  的部分简并本征态叠加而成, 即  $\hat{H}|\psi_S\rangle = 0$ 。通过将梯子晶格分为两个连通部分 (如图 2(a)), 计算二分冯·诺依曼纠缠熵

$S_{VN} = -\text{Tr}(\rho_a \log \rho_a)$  描述其纠缠特性, 其中  $\rho_a$  为  $a$  的约化密度矩阵。纠缠熵随  $a$  的尺寸线性增加, 展现出了体积定律,  $\hat{H}$  的基态则与系统尺寸之间呈对数关系。需要说明的是, 体积定律的出现依赖于子空间  $a$  的选择, 某些特殊划分下彩虹伤痕态也

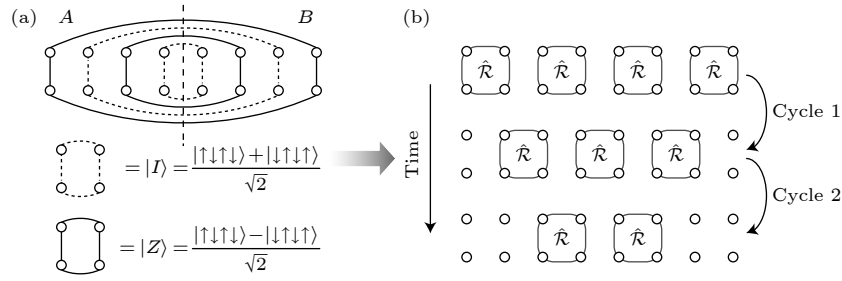


图 1 (a) 分形子模型中彩虹伤痕态的示意图, 中心对称的四个格点间形成交错的四体 GHZ 态 ( $|I\rangle$  和  $|Z\rangle$ ); (b) 调制四体相互作用  $\hat{\mathcal{R}}$ , 在晶格的两端形成四体纠缠态。通过多周期调制和交错的  $\hat{\sigma}^z$  门操作实现态制备

Fig. 1. (a) Rainbow scar state with each bond a distributed four-qubit GHZ state  $|I\rangle$  and  $|Z\rangle$ ; (b) illustration for the preparation of rainbow scar states by modulating four-body ring-exchange interactions  $\hat{\mathcal{R}}$  and gate operations  $\hat{\sigma}^z$ .

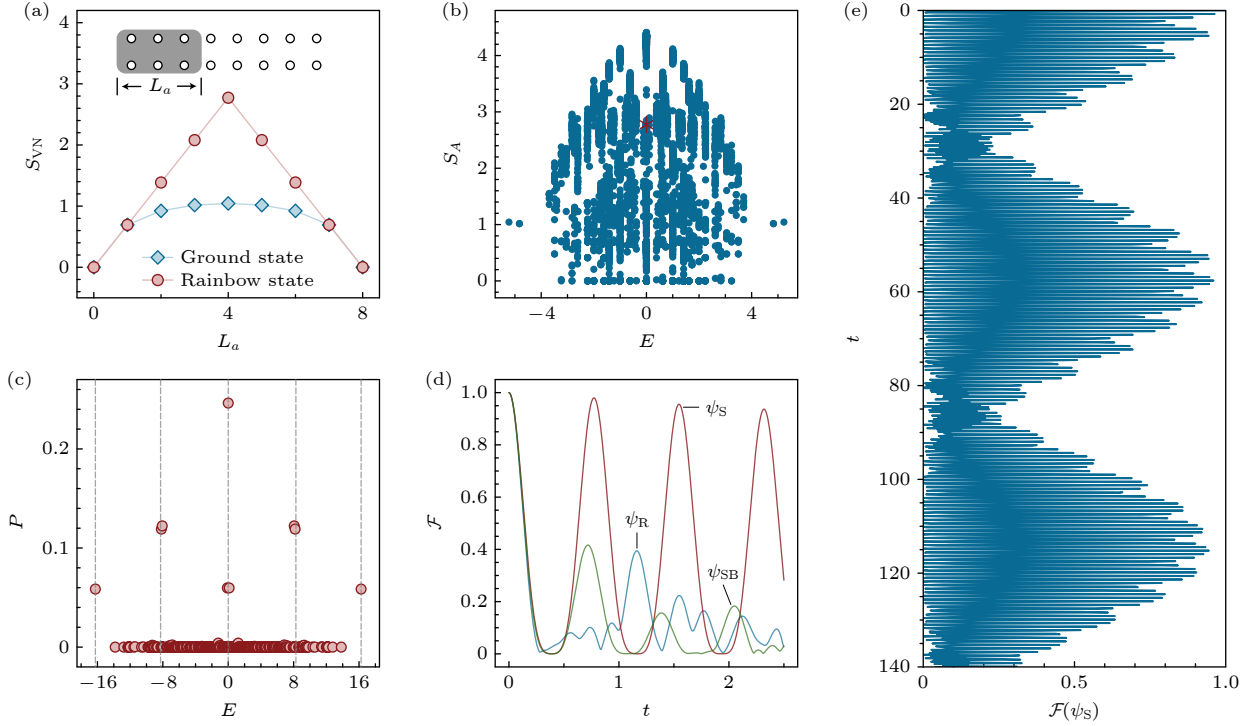


图 2 (a) 分形子模型中彩虹伤痕态 (红色圆形) 和基态 (蓝色菱形) 的二分冯·诺依曼纠缠熵, 子空间  $a$  的长度为  $L_a \in [0, L]$ ; (b) 均匀分割子空间  $L_a = L/2$ , 周期性边界条件下分形子模型的不同本征态的二分纠缠熵  $S_A$ , 红色的星形代表彩虹伤痕态; (c) 引入外场后, 破坏彩虹伤痕态内部对称性, 不同能量的本征态占比呈现等间隔分布; (d) 外场作用下的淬火动力学 ( $h_z = 2, J_i = J_{AB} = 1$ ), 蓝色实线为彩虹态, 红色实线为彩虹伤痕态, 绿色实线为破坏子系统  $\hat{U}(1)$  对称性后的彩虹伤痕态; (e) 外场作用下的彩虹伤痕态在大时间尺度下的周期性振荡行为。上述结果通过精确对角化  $2 \times 8$  的梯子晶格计算得到

Fig. 2. (a) The bipartite von Neumann entanglement entropy of the rainbow scar state (red circle) and the ground state (blue diamond), with the length of subspace  $a$  being  $L_a \in [0, L]$ ; (b) the bipartite entanglement entropy of the eigenstates of the fracton model under periodic boundary conditions with  $L_a = L/2$ , where the red star represents the result of the rainbow scar state; (c) the overlap between the rainbow scar state and each energy eigenstate after breaking the internal symmetry of the rainbow scar state with  $h_z = 2, J_i = J_{AB} = 1$ ; (d) the quench dynamics of fidelity with rainbow state (blue), rainbow scar states (red) and rainbow scar states without subsystem  $\hat{U}(1)$  symmetry (green); (e) periodic oscillation behavior of rainbow scar states under external fields at long-time scales. The above results were obtained through exact diagonalization calculations on a  $2 \times 8$  ladder lattice.

可以写作直积态的形式. 图 2(b) 展示了周期性条件下哈密顿量  $\hat{H}$  各个本征态的二分纠缠熵. 与一般的多体伤痕态不同, 分形子模型中彩虹伤痕态并未明显从能谱中分离. 在  $\hat{H}_A$  中引入单格点的相互作用  $\hat{H}_{\text{lift}} = \sum (-1)^i h_z \hat{S}^z$ , 分析简并本征态的组成 [50,51]. 外场破坏了  $E = 0$  本征态的局域简并性和哈密顿量的可积性, 形成一系列分裂的本征能级  $|\text{eig}\rangle$ . 对应的伤痕空间哈密顿量为

$$\hat{H}_{\text{scar}} = \hat{H} + \hat{H}_{\text{lift}} \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \mathcal{M} \hat{H}_{\text{lift}} \mathcal{M}. \quad (4)$$

如图 2(c) 所示, 在外场影响下,  $|\psi_S\rangle$  由等间隔的本征能级  $|\text{eig}\rangle$  组成, 纵坐标为测得能量为  $E$  的本征态概率  $P = \sum |\langle \psi_S | \text{eig} \rangle|^2$ , 呈现塔的构型. 图 2(d) 中绘制了保真度  $\mathcal{F} = |\langle \psi(t) | \psi(t=0) \rangle|^2$  的淬火动力学演化, 假定  $h_z = 2$ ,  $J_i = J_{AB} = 1$ , 计算的时间步长为  $dt = 0.0025$ . 彩虹态

$$|\psi_R\rangle = \frac{1}{2^{L/4}} \prod_{i \in \text{even}} [1 + \hat{S}_{i+1}^+ \hat{S}_{i+2}^- \hat{S}_{2L-i}^- \hat{S}_{2L-i-1}^+] |0110\rangle$$

出现了明显的热化现象.

与之相反, 彩虹伤痕态  $|\psi_S\rangle$  即使未与能谱中各个本征态分离, 仍然呈现出周期约为  $\tau \approx 0.77$  的近乎完美的相干振荡, 表明违反 ETH 的现象出现. 外场的引入在保证子系统  $\hat{U}(1)$  对称性的同时, 破坏了系统的时间反演对称性. 进一步在伤痕空间内引入均匀横场  $\hat{H}_{\text{BS}} = \sum \hat{S}^x$  破坏伤痕空间的子系统  $\hat{U}(1)$  对称性, 该态的保真度随时间降低, 发生了明显的热化. 这说明该弱热化的现象可能来源于子系统对称性的保护, 与分形子模型中激发运动受限的特性相关 [52]. 值得一提的是, 图 2(d) 中彩虹伤痕态的相干振荡幅度随时间逐渐衰减, 这一现象与先前多体伤痕态的研究结果一致 [53,54], 同样表明了弱热化的过程.

为进一步探究彩虹伤痕态的非平衡动力学特性, 研究了其在更长时间尺度上的淬火演化. 如图 2(e) 所示, 在较短的时间尺度下 ( $t \lesssim 29$ ), 保真度振荡的幅度逐渐降低至 17%. 然而, 随着演化的继续, 在更长的时间尺度下 ( $29 \lesssim t \lesssim 58$ ), 振幅又逐渐恢复至 96%. 这一长周期下的保真度恢复现象进一步验证了彩虹伤痕态的弱热化特性, 并表明模型中独立伤痕空间的存在, 使得初态信息在长时间演化后仍能得到保留.

### 3 动力学制备

彩虹伤痕态可以通过调制不同格点间的相互作用强度 [55,56] 和  $\hat{\sigma}^z$  门操作实现高保真度的动力学制备. 具体应用于四体相互作用下的分形子模型时, 设定四体相互作用强度为  $J_{e(o)}$  交错排列, 系统哈密顿量为

$$\hat{H} = \sum_i -J_e \hat{S}_{4i+1}^+ \hat{S}_{4i+2}^- \hat{S}_{4i+3}^- \hat{S}_{4i+4}^+ - J_o \hat{S}_{4i+3}^+ \hat{S}_{4i+4}^- \hat{S}_{4i+5}^- \hat{S}_{4i+6}^+ + \text{h.c.} \quad (5)$$

如图 1(b) 所示, (5) 式中  $J_e$  或  $J_o$  作用于空间独立的格点, 已在超冷原子和超导比特实验中得到验证 [46,47]. 通过周期性调制理论将单个四体交换相互作用扩展至整个梯子晶格, 其动力学过程为重复的两步调制序列. 每步调制作用于对应的偶数或奇数  $2 \times 2$  的格子中, 演化过程表示为

$$\begin{aligned} |\psi_{t=N(T_e+T_o)}\rangle &= (\hat{U})^N |\psi_0\rangle \\ &= \left[ e^{-\sum j 2T_e / (T_e+T_o) \hat{\mathcal{R}}} e^{-\sum j 2T_o / (T_e+T_o) \hat{\mathcal{R}}} \right]^N |\psi_0\rangle \\ &\approx e^{-j \hat{H} N (T_e+T_o)} |\psi_0\rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $T_e$  和  $T_o$  分别表示偶奇格子相互作用的时间,  $j$  代表虚数. 在高频近似下 ( $J_R T_{e(o)} \ll 1$ ), 舍弃时间高阶项的影响, 可以等效实现上述的分形子模型. 调节  $T_e$  和  $T_o$  的比例即可对哈密顿量中  $J_e$  和  $J_o$  相互作用强度进行调制.

考虑到计算资源的有限性, 仅在  $L = 12$  的梯子晶格中模拟动力学制备过程. 初始哈密顿量设定为  $J_o = 0$ ,  $J_e = 1$  (图 1(b)), 初态为尼尔态  $|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\rangle$ . 之后再经历  $1/4$  个周期的振荡和相移门操作:  $R = \prod e^{i\pi/4(\hat{S}_m^z + \hat{S}_n^z)}$ , 其中  $(m, n)$  为  $2 \times 2$  格子中对角的两个格点, 得到初始哈密顿量的基态:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{2^3} \prod_{i \in \{0,4,8,12\}} \left[ 1 + \hat{S}_{i+1}^+ \hat{S}_{i+2}^- \hat{S}_{i+3}^- \hat{S}_{i+4}^+ \right] |0110\rangle. \quad (7)$$

此时, 晶格的两个子空间  $A$  和  $B$  相互独立, 可以表示为直积的形式, 冯·诺依曼纠缠熵  $S_A = 0$  (图 3(b)). 计算边界上四个格点 (1, 2, 23, 24) 的约化密度矩阵, 其与 GHZ 态的保真度  $\mathcal{F}_{\rho_c} = |\langle I | \rho_c | I \rangle| = 0.25$ . 如图 3(c) 所示, 此时的自旋关联仅在交错的最近邻四个格点中产生. 随后线性地关闭四体相互作用  $J_e$  并开启  $J_o$ , 直至边界的四个格点逐渐与梯子晶格主体分离. 当  $t = 40$  时, 形成  $J_o = 1$ ,  $J_e = 0$

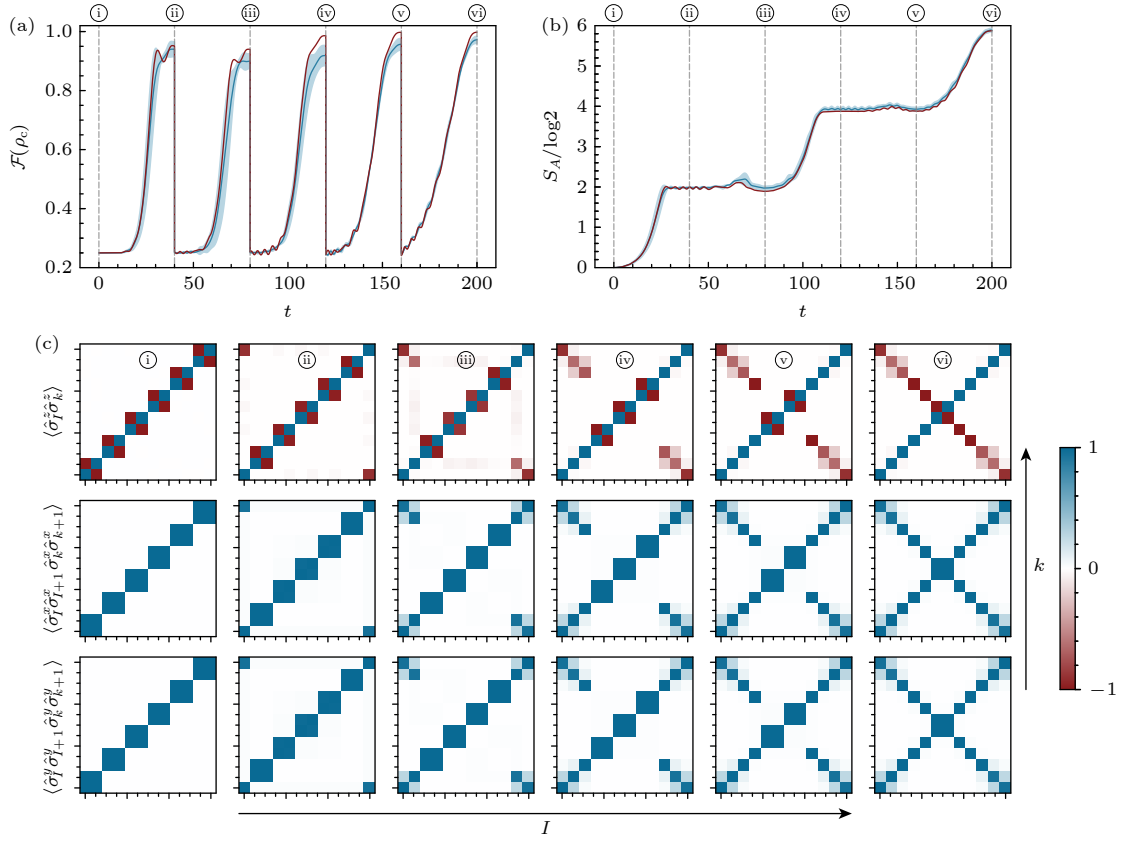


图 3 (a) 通过线性调制四体相互作用的强度  $J_{0(e)}$ , 各个演化周期下, 中心对称的四个格子形成 GHZ 态的保真度随时间的演化. (b) 均匀分割的二分纠缠熵随时间逐渐增长为  $L/2 \log 2$ , 红色曲线代表无噪声情况, 蓝色曲线为相互作用强度噪声  $J \sim \mathcal{N}(1, 0.2^2)$  影响下三次模拟的平均, 阴影为相应的标准差. (c) 中心对称格点间的自旋关联的建立过程. 系统尺寸为  $2 \times 12$  的梯子晶格

Fig. 3. (a) Time evolution of the fidelity with the distributed GHZ state through modulating the ring-exchange interaction linearly between each plaquette. (b) The von Neumann entropy  $S_A$  between two sides increases until  $L/2 \log 2$ . The red curve represents the noise-free case, while the blue curve represents the average of three simulations affected by Gaussian noise  $\mathcal{N}(1, 0.2^2)$ , with the blue shadow indicating the corresponding standard deviation. (c) Two-site and four-site spin-spin correlations between centrosymmetric sites develop during the evolution. The geometry of the ladder is  $2 \times 12$ .

的晶格构型 (图 1(b)). 由于子系统  $\hat{U}(1)$  对称性的保护, 边界的四个格点形成一组长程纠缠的四体 GHZ 态  $|I\rangle$ , 保真度  $\mathcal{F}_{\rho_c} = 95.2\%$ . 通过可观测量  $\hat{\sigma}_l^z \hat{\sigma}_k^z$  和  $\hat{\sigma}_l^\mu \hat{\sigma}_{l+1}^\mu \hat{\sigma}_k^\mu \hat{\sigma}_{k+1}^\mu$  (其中  $\mu = x, y$ ) 理论分析远距离四体 GHZ 态的自旋关联建立过程. 其中  $l, k$  为梯子晶格中第一行的不同格点坐标. 如图 3(c) 所示, 晶格两端的格点间自旋关联成功建立, 证明了远距离 GHZ 的制备, 完成第一步的调制过程. 此时, 晶格中间的格点构成了链长  $L = 10$  的基态, 对应的波函数近似写作:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2^{5/2}} |I_{1,2,2L-1,2L}\rangle \times \prod_{i \in \{2, 6, 10\}} \left[ 1 + \hat{S}_{i+1}^+ \hat{S}_{i+2}^- \hat{S}_{i+3}^- \hat{S}_{i+4}^+ \right] |0110\rangle. \quad (8)$$

在保持两端四体相互作用关闭的情况下, 将四体相互作用  $J_0$  线性降低至 0 并开启  $J_e$ . 在  $t = 80$

的时候, 可以在 (3, 4, 21, 22) 的四个格点中形成四体 GHZ 态, 保真度  $\mathcal{F}_{\rho_c} = 93.9\%$ , 保真度较低来源于第一步调制中  $|\psi_1\rangle$  的保真度不纯. 随后不断重复上述流程, 生成由  $|I\rangle$  构成的长程纠缠态:

$$|\psi_R\rangle = \frac{1}{2^3} \prod_{i \in \{0, 2, 4, 6\}} \left[ 1 + \hat{S}_{i+1}^+ \hat{S}_{i+2}^- \hat{S}_{2L-i}^- \hat{S}_{2L-i-1}^+ \right] |0110\rangle. \quad (9)$$

如图 3(b) 所示, 子空间  $A$  的冯·诺依曼纠缠熵  $S_A = 5.88 \log 2 \approx L/2 \log 2$ , 体现了体积定律下的纠缠熵.  $A$  与  $B$  两个子空间中心对称的格点间也依次产生自旋关联. 在梯子晶格中第一行的格点上交错作用  $\hat{\sigma}^z$  算符, 对远距离 GHZ 态的相位调制, 形成  $|IZIZ \dots\rangle$  的交错排列, 最终在分分子模型中完成彩虹伤痕态  $|\psi_S\rangle$  的制备. 每次调制中, 均以  $\tau = 40$  线性驱动, 对系统的相干时间存在较高的要

求. 通过最优控制理论调节线型<sup>[57,58]</sup>, 可以将每一步的驱动时间缩短至量子速度极限. 进一步对方案的鲁棒性进行分析, 考虑因系统缺陷引起的四体相互作用的不均匀性. 假定每一步调制中, 四体相互作用强度符合  $J_i \sim \mathcal{N}(1, 0.2^2)$  标准差为 20% 的高斯分布. 图 3(a) 和图 3(b) 中的蓝色曲线分别展示了含噪情况下保真度和纠缠熵的演化, 阴影部分为统计标准差. 发现含噪情况下每一组四体纠缠的保真度仍然在 90% 以上, 末态的二分纠缠熵  $S_A = 5.88 \log 2$ , 基本满足体积定律, 表明该方案具备一定的鲁棒性.

## 4 结 论

本文研究了四体交换相互作用下分形子模型中的彩虹伤痕态. 该态由一系列四体纠缠组成, 分布于中心对称的四个格点. 其二分纠缠熵呈现体积定律, 处于能谱的主体中, 并没有出现明显的分离现象. 在淬火动力学的演化中, 该态保真度的相干振荡现象证明了其弱热化特性. 引入横场破坏子系统的  $\hat{U}(1)$  对称性后, 该态则迅速发生热化, 导致初始信息的丧失. 随后, 本文提出通过调制四体相互作用和  $\delta^z$  门操作, 在分形子模型中实现彩虹伤痕态的理论方案. 对制备过程中相互作用的强度噪声的影响进行分析, 证明方案具备一定的鲁棒性. 对分形子模型中非平衡动力学过程进行研究, 证明了该模型下彩虹伤痕态的存在, 为各类运动受限的量子系统和拓扑序系统中的动力学问题<sup>[59,60]</sup> 研究提供了新的途径. 在未来的工作中, 我们将基于彩虹伤痕态, 进一步研究量子信息扰动下的量子态重构过程<sup>[61,62]</sup>.

感谢中国科学技术大学苑涛博士、毛一屹博士的讨论.

## 参考文献

- [1] Polkovnikov A, Sengupta K, Silva A, Vengalattore M 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 863
- [2] Dmitriev I A, Mirlin A D, Polyakov D G, Zudov M A 2012 *Rev. Mod. Phys.* **84** 1709
- [3] Pekola J P, Karimi B 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 041001
- [4] Deutsch J M 1991 *Phys. Rev. A* **43** 2046
- [5] Srednicki M 1994 *Phys. Rev. E* **50** 888
- [6] Rigol M, Dunjko V, Yurovsky V, Olshanii M 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 050405
- [7] Calabrese P, Essler F H L, Fagotti M 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 227203

- [8] Nandkishore R, Huse D A 2015 *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **6** 15
- [9] Schreiber M, Hodgman S S, Bordia P, Lüschen H P, Fischer M H, Vosk R, Altman E, Schneider U, Bloch I 2015 *Science* **349** 842
- [10] Moudgalya S, Rachel S, Bernevig B A, Regnault N 2018 *Phys. Rev. B* **98** 235155
- [11] Choi S, Turner C J, Pichler H, Ho W W, Michailidis A A, Papic Z, Serbyn M, Lukin M D, Abanin D A 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 220603
- [12] Schecter M, Iadecola T 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 147201
- [13] Shiraishi N, Mori T 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 030601
- [14] Lin C J, Motrunich O I 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 173401
- [15] Ok S, Choo K, Mudry C, Castelnuovo C, Chamon C, Neupert T 2019 *Phys. Rev. Res.* **1** 033144
- [16] Langlett C M, Yang Z C, Wildeboer J, Gorshkov A V, Iadecola T, Xu S 2022 *Phys. Rev. B* **105** L060301
- [17] Wildeboer J, Langlett C M, Yang Z C, Gorshkov A V, Iadecola T, Xu S 2022 *Phys. Rev. B* **106** 205142
- [18] Iversen M, Bardarson J H, Nielsen E B 2024 *Phys. Rev. A* **109** 023310
- [19] Ramírez G, Rodríguez-Laguna J, Sierra G 2015 *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* **2015** 06002
- [20] Ramírez G, Rodríguez-Laguna J, Sierra G 2014 *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* **2014** 10004
- [21] Dutta S, Kuhr S, Cooper N R 2024 *Phys. Rev. Res.* **6** L012039
- [22] Byles L, Sierra G, Pachos J K 2024 *New J. Phys.* **26** 013055
- [23] Serbyn M, Abanin D A, Papić Z 2021 *Nat. Phys.* **17** 675
- [24] Moudgalya S, Bernevig B A, Regnault N 2022 *Rep. Prog. Phys.* **85** 086501
- [25] Srivatsa N S, Yarloo H, Moessner R, Nielsen E B 2023 *Phys. Rev. B* **108** L100202
- [26] Haah J 2011 *Phys. Rev. A* **83** 042330
- [27] Vijay S, Haah J, Fu L 2016 *Phys. Rev. B* **94** 235157
- [28] Pretko M, Radzihovsky L 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 195301
- [29] Gromov A, Radzihovsky L 2024 *Rev. Mod. Phys.* **96** 011001
- [30] Du Y H, Mehta U, Nguyen D, Son D T 2022 *SciPost. Phys.* **12** 050
- [31] Prem A, Huang S J, Song H, Hermele H 2019 *Phys. Rev. X* **9** 021010
- [32] Benedetti V, Bueno P, Magan J M 2023 *Phys. Rev. Lett.* **131** 111603
- [33] Prem A, Haah J, Nandkishore R 2017 *Phys. Rev. B* **95** 155133
- [34] Pretko M 2017 *Phys. Rev. B* **96** 115102
- [35] Pai S, Pretko M 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 136401
- [36] Pretko M, Chen X, You Y 2020 *Int. J. Mod. Phys. A* **35** 2030003
- [37] Sala P, Rakovszky T, Verresen R, Knap M, Pollmann F 2020 *Phys. Rev. X* **10** 011047
- [38] Scherg S, Kohlert T, Sala P, Pollmann F, Madhusudhana H B, Bloch I, Aidelburger M 2021 *Nat. Commun.* **12** 4490
- [39] Kohlert T, Scherg S, Sala P, Pollmann F, Madhusudhana H B, Bloch I, Aidelburger M 2023 *Phys. Rev. Lett.* **130** 010201
- [40] Adler D, Wei D, Will M, Srakaew K, Agrawal S, Weckesser P, Moessner R, Pollmann F, Bloch I, Aidelburger M 2024 *Nature* **636** 80
- [41] Imai S, Tsuji N 2025 *Phys. Rev. Res.* **7** 013064
- [42] Weinberg P, Bukov M 2019 *SciPost Phys.* **7** 020
- [43] Aasen D, Bulmash D, Prem A, Slagle K, Williamson D J 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 043165
- [44] You Y Z, Burnell F J, Hughes T L 2021 *Phys. Rev. B* **103** 245128

- [45] Paredes B, Bloch I 2008 *Phys. Rev. A* **77** 023603
- [46] Dai H N, Yang B, Reingruber A, Sun H, Xu X F, Chen Y A, Yuan Z S, Pan J W 2017 *Nat. Phys.* **13** 1195
- [47] Marcos D, Widmer P, Rico E, Hafezi M, Rabl P, Wiese U J, Zoller P 2014 *Ann. Phys.* **351** 634
- [48] Sala P, Rakovszky T, Verresen R, Knap M, Pollmann F 2020 *Phys. Rev. B* **101** 125126
- [49] Khudorozhkov A, Tiwari A, Chamon C, Neupert T 2022 *SciPost Phys.* **13** 098
- [50] O'Dea N, Burnell F, Chandran A, Khemani V 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 043305
- [51] Ren J, Liang C, Fang C 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 120604
- [52] Zhao H Z, Smith A, Mintert F, Knolle J 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 150601
- [53] Ho W W, Choi S, Pichler H, Lukin M D 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 040603
- [54] Mondragon-Shem I, Vavilov M G, Martin I 2021 *PRX Quantum* **2** 030349
- [55] Barmettler P, Rey A M, Demler E, Lukin M D, Bloch I, Gritsev V 2008 *Phys. Rev. A* **78** 012330
- [56] Alkurtass B, Banchi L, Bose S 2014 *Phys. Rev. A* **90** 042304
- [57] Glaser S J, Boscain U, Calarco T, Koch C P, Köckenberger W, Kosloff R, Kuprov I, Luy B, Schirmer S, Schulte-Herbrüggen T, Sugny D, Wilhelm F K 2015 *Eur. Phys. J. D* **69** 279
- [58] Carleo G, Cirac I, Cranmer K, Daudet L, Schuld M, Tishby N, Vogt-Maranto L, Zdeborová L 2019 *Rev. Mod. Phys.* **91** 045002
- [59] Buijsman W 2022 *Phys. Rev. B* **106** 045104
- [60] Dong Y, Zhang S Y, Deng D L 2023 *Phys. Rev. B* **108** 195133
- [61] Schuster T, Kobrin B, Gao P, Cong I, Khabiboulline E T, Linke N M, Lukin M D, Monroe C, Yoshida B, Yao N Y 2022 *Phys. Rev. X* **12** 031013
- [62] Agarwal L, Langlett C M, Xu S 2023 *Phys. Rev. Lett.* **130** 020801

## COVER ARTICLE

Rainbow scar states in the fracton model<sup>\*</sup>XIE Yanjun<sup>1)2)3)</sup>     DAI Hanning<sup>1)2)3)†</sup>

1) (*Hefei National Research Center for Physical Sciences at the Microscale and School of Physical Sciences,  
University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

2) (*Shanghai Research Center for Quantum Sciences and CAS Center for Excellence in Quantum Information and  
Quantum Physics, University of Science and Technology of China, Shanghai 201315, China*)

3) (*Hefei National Laboratory, Hefei 230088, China*)

( Received 15 January 2025; revised manuscript received 11 March 2025 )

## Abstract

The eigenstate thermalization hypothesis describes the nonequilibrium dynamics of an isolated quantum many-body system, during which a pure state becomes locally indistinguishable from a thermal ensemble. The discovery of quantum many-body scars (QMBS) shows a weak violation of ergodicity, characterized by coherent oscillations of local observables after a quantum quench. These states consist of the tower of regular eigenstates which are equally spaced in the energy spectrum. Although subextensive entanglement scaling is a primary feature widely used to detect QMBS numerically as entropy outliers, rainbow scars exhibit volume-law scaling, which may challenge this property. In this work, we construct the rainbow scar state in the fracton model on a two-leg ladder. The fracton model is composed of four-body ring-exchange interactions, exhibiting global time-reversal symmetry  $\hat{T} = \mathcal{K}i\hat{\sigma}^y$  and subsystem  $\hat{U}(1) = \prod_{j \in \{\text{row/col}\}} \exp\left(i\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_j^z\right)$  symmetry. The subsystem symmetry constrains particle mobility, hindering the establishment of thermal equilibrium and leading to a series of anomalous dynamical processes. We construct the rainbow scar state with distributed four-body GHZ states whose entanglement entropy follows the volume law. By calculating the eigenstates of the fracton model with exact diagonalization, the rainbow scar state consists of a series of degenerate high-energy excited states that are not significant outliers among other eigenstates in the spectrum. By introducing the on-site interaction to break the time-reversal symmetry, the degeneracy of rainbow scar states is lifted into an equally spaced tower of states, ensuring the revival of the initial state. However, when subsystem  $\hat{U}(1)$  symmetry is broken, the scar state is quickly thermalized, indicating that the weak thermalization may be protected by subsystem  $\hat{U}(1)$  symmetry. Additionally, we propose a scheme for preparing the rainbow scar state by modulating the strength of the four-body interaction and  $\hat{\sigma}^z$  operations, analyzing the influence of noise on the strength of the four-body interaction. This work provides new insights into the weak thermalization processes in fracton model and aids in understanding the nature of ETH-violation in various nonequilibrium systems.

**Keywords:** four-body ring exchange interactions, fracton model, many-body scar states

**PACS:** 03.65.Ud, 03.65.Vf, 03.67.Bg, 42.50.Dv

**DOI:** 10.7498/aps.74.20250061

**CSTR:** 32037.14.aps.74.20250061

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12074367), the National Key R&D Program of China (Grant Nos. 2020YFA0309804, 2023YFC2206200), the Shanghai Municipal Science and Technology Major Project, China (Grant No. 2019SHZDZX01), and the Innovation Program for Quantum Science and Technology, China (Grant No. 2021ZD0302002).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [daihan@ustc.edu.cn](mailto:daihan@ustc.edu.cn)

## 分形子模型中的彩虹伤痕态

谢岩骏 戴汉宁

### Rainbow scar states in the fracton model

XIE Yanjun DAI Hanning

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 100302 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250061

CSTR: 32037.14.aps.74.20250061

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250061>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 一维任意子Stark模型的多体局域化

Many-body localization of a one-dimensional anyon Stark model

物理学报. 2025, 74(4): 040301 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20241615>

#### 随机两体耗散诱导的非厄米多体局域化

Random two-body dissipation induced non-Hermitian many-body localization

物理学报. 2024, 73(7): 077202 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231987>

#### 非监督学习高维多体波函数矢量轨迹所在低维子空间

Low-dimensional trajectory subspace of high-dimensional many-body wavefunctions by unsupervised learning

物理学报. 2021, 70(24): 247101 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210697>

#### 量子多体系统中的拓扑序与分数化激发

Topological order and fractionalized excitations in quantum many-body systems

物理学报. 2024, 73(7): 070301 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240222>

#### 基于冷原子的非平衡量子多体物理研究

Non-equilibrium quantum many-body physics with ultracold atoms

物理学报. 2023, 72(23): 230701 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20231375>

#### 离子阱中以声子为媒介的多体量子纠缠与逻辑门

Phonon-mediated many-body quantum entanglement and logic gates in ion traps

物理学报. 2022, 71(8): 080301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220360>