

中等质量核形状共存与壳效应研究*

刘冬 郭建友[†]

(安徽大学物理与光电工程学院, 合肥 230601)

(2025年1月21日收到; 2025年3月28日收到修改稿)

对原子核形状共存和壳效应的研究有助于人们深入理解原子核内部结构。物理学家们在Zn, Ge, Se, Kr的同位素研究中, 发现了显著的形状共存现象与刚性三轴性特征。为了深入探究形状共存现象及其对原子核基态性质的影响, 我们采用相对论Hartree-Bogoliubov理论中密度依赖的介子交换模型, 对 $N=32\text{--}42$ 的偶偶核Zn, Ge, Se, Kr同位素的基态性质进行了系统研究, 获得的势能面清晰地展现了这些同位素存在形状共存和三轴性特征。计算获得了原子核的基态能量、形变参数、双中子分离能、中子半径、质子半径和电荷半径, 结果都支持 $N=40$ 为新幻数, 部分结果也支持 $N=32, 34$ 为新幻数。尤其, 三轴形变在其中扮演着重要角色。进一步, 我们探讨了壳效应与形状共存现象之间可能存在的关联及其对原子核基态性质的影响, 并分析了这些变化的物理机制。

关键词: 形状共存, 壳效应, 新幻数

PACS: 21.10.Ft, 21.10.Ky, 21.10.Hw

CSTR: 32037.14.aps.74.20250095

DOI: [10.7498/aps.74.20250095](https://doi.org/10.7498/aps.74.20250095)

现象的产生的原因之一^[8,9]。

为了深入探究这些现象的本质, 核物理学家已发展出许多理论方法。2008年, 圣宗强等^[10]、焦朋等^[11]和王刚等^[12]在相对论平均场理论下用NL3参数组系统地研究了多个同位素链中的偶偶核, 并在后续对原子核形状演变做了更进一步的探讨。2016年, Nomura等^[13]基于Gogny-D1M能量密度泛函的自洽平均场近似所提供的微观数据, 运用相互作用玻色子模型, 对质量数 $A=100$ 附近的原子核的形状相变进行了详细研究, 发现了Zr和Sr原子核中存在着显著的长椭球形和扁椭球形共存的现象。2022年, Karim等^[14]在协变密度泛函理论(CDFT)的框架下, 利用密度依赖的介子交换和点耦合模型, 系统地研究了I同位素($Z=53, N=70\text{--}80$)的基态性质, 结果清楚地展现了原子核的形状相变和形状共存现象。2023年, Zhang等^[15]采用连续谱中的形变相对论Hartree-Bogoliubov

* 国家自然科学基金(批准号: 12475115, 11935001, 11575002)资助的课题。

† 通信作者。E-mail: jianyou@ahu.edu.cn

bov (RHB) 理论研究了 Kr 和 Sr 同位素的基态性质. 同时也预测了在这些同位素链中可能存在形状共存现象. 此外, 集体哈密顿量以及基于机器学习的密度泛函理论等多种方法也被用于研究原子核的形状共存^[16–21].

原子核的形状主要由其核子数以及核子之间的相互作用决定. 原子核中的质子和中子两两配对, 当质子或中子壳层被完全占满时, 即达到所谓的“满壳”状态, 此时原子核具有相对稳定的能量状态, 核子之间的相互作用力达到了一种平衡, 原子核的基态通常呈现为球形^[22]. 当添加或减少核子时, 这种平衡状态可能会被打破, 从而导致原子核发生形变, 形成其他非球形形状, 例如长椭球形或扁椭球形等. 在研究不同原子核沿着同位素链的形状相变时, 我们通过理论计算发现当中子数为传统幻数时, 例如 $N = 50$, 原子核的形状呈现为标准的球形. 当中子数为新幻数时, 例如 $N = 32, 34, 40$ ^[23–26], 原子核通常会出现形状共存与三轴性特征. 值得注意的是, 幻数的稳定性可能显著依赖于核区: 近期研究表明, 在超镄核区 ($Z = 102$ — 110 , $N \approx 258$), 由于极端质子-中子比与强库仑排斥效应, 可能存在新的壳层闭合现象^[27]. 这种幻数随核区变化的特性进一步凸显了核结构对形变、连续谱效应等微观机制的敏感性. 这让我们对新幻数的研究产生了兴趣. 在本文中, 我们基于协变密度泛函理论, 深入探究了中子数包含新幻数的 Zn, Ge, Se, Kr 同位素的基态性质, 此外还探究了这些同位素中可能存在的形状共存与三轴性. 通过采用具有密度依赖的介子交换的 RHB 理论, 我们计算了这些同位素的势能面. 在此基础上我们还获得了这些同位素的基态形变值、结合能、双中子分离能、质子半径、中子半径以及电荷半径, 计算的结果都支持 $N = 40$ 为新幻数, 部分结果也支持 $N = 32, 34$ 为新幻数. 该方法实现了对原子核的基态性质的自洽描述, 为理解原子核复杂结构提供了新的视角与见解.

2 理论框架

CDFT 在描述稳定核和奇特核的基态性质方面非常有效. 它对原子核形状演化及相变和多种形式共存等现象提供了特殊的视角. 在我们目前的研究中, 采用了基于介子交换相互作用的 CDFT, 详细内容可见对此方面有开创性贡献的文献^[28–31].

在基于介子交换相互作用的 CDFT 的这一理论框架下, 我们选用了 DD-ME2 参数集进行 RHB 计算. 在下面, 我们将对理论框架进行概述. 在采用 DD-ME2 参数组进行 RHB 计算时, 该体系的拉格朗日密度表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}_i \{ i\gamma^\mu \partial_\mu - M \} \psi_i + \frac{1}{2} \partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma \\ & - U(\sigma) - g_\sigma \bar{\psi}_i \psi_i \sigma \\ & - \frac{1}{4} \Omega^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^\mu \omega_\mu - g_\omega \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_i \omega_\mu n \\ & - \frac{1}{4} \vec{R}^{\mu\nu} \vec{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}^\mu \vec{\rho}_\mu - g_\rho \bar{\psi}_i \gamma^\mu \vec{\tau} \psi_i \vec{\rho}_\mu \\ & - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - e \bar{\psi}_i \gamma^\mu \frac{1 - \tau_3}{2} \psi_i A_\mu, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 ψ 表示狄拉克旋量, M 表示核子质量. 符号 m_σ , m_ω 和 m_ρ 分别表示 σ , ω 和 ρ 介子的质量. 相应的耦合常数分别为 g_σ , g_ω 和 g_ρ . e 与质子的电荷有关. 场张量 $\Omega^{\mu\nu}$, $\vec{R}^{\mu\nu}$ 和 $F_{\mu\nu}$ 分别表示为

$$\begin{aligned} \Omega_{\mu\nu} &= \partial^\mu \Omega^\nu - \partial^\nu \Omega^\mu, \\ \vec{R}^{\mu\nu} &= \partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu, \\ F_{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \end{aligned} \quad (2)$$

对于满足时间反演对称性的静态原子核而言, 其内部不产生流. 因此, 空间分量 ω , $\vec{\rho}$ 和 A 消失了. 剩下的是类时间分量 ω_0 , $\vec{\rho}_0$ 和 A_0 . 由同位旋守恒可得只有 ρ_3 分量存在. 经典变分原理可以给出核子运动的狄拉克方程:

$$\{-i\alpha \cdot \nabla + \beta(M + S(r)) + V(r)\} \psi_i(r) = \varepsilon_i \psi_i(r), \quad (3)$$

以及介子和光子运动的克莱因-高登方程:

$$\begin{aligned} -\Delta \sigma(r) + \partial_\sigma U(\sigma) &= -g_\sigma \rho_s(r), \\ \{-\Delta + m_\omega^2\} \omega_0(r) &= g_\omega \rho_v(r), \\ \{-\Delta + m_\rho^2\} \rho_0(r) &= g_\rho \rho(r), \\ -\Delta A_0(r) &= e \rho_p(r), \end{aligned} \quad (4)$$

其中相互作用势分为标量势与矢量势:

$$\begin{aligned} S(r) &= g_\sigma \sigma, \\ V(r) &= g_\omega \omega + g_\rho \tau_3 \rho + e A_0 + \Sigma_0^R, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\Sigma_0^R = \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v} \rho_s \sigma + \frac{\partial g_\omega}{\partial \rho_v} \rho_v \omega + \frac{\partial g_\rho}{\partial \rho_v} \rho_{tv} \rho. \quad (6)$$

ρ_{tv} 代表同位旋矢量密度, 即质子和中子矢量密度

之差. 更多细节可以参考文献 [31].

3 数值计算结果与讨论

本研究基于上述理论框架开展计算, 采用了 DD-ME2 参数组与可分离对力. 计算使用代码可在 Niksic 等^[32]论文中下载. 在讨论结果之前, 需要先解释数值方面的问题. 本文利用三轴相对论 Hartree-Bogoliubov(RHB) 模型, 对总能量进行约束计算, 这个过程使我们能够准确定位全局基态最小值并跟踪基态形状的演变. 使用三维谐振子基求解 RHB 方程. 对于玻色子, 壳层的数量固定为 $N_B = 20$, 费米子的壳层数则固定为 $N_f = 12$. 约束计算是通过对轴向和三轴质量四极矩施加约束来实现的, 使用二次约束的方法^[33]使用函数的变化不受限制.

$$\langle \hat{H} \rangle + \sum_{\mu=0,2} C_{2\mu} \left(\langle \hat{Q}_{2\mu} \rangle - q_{2\mu} \right)^2, \quad (7)$$

式中, $\langle \hat{H} \rangle$ 为总能量; $\langle \hat{Q}_{2\mu} \rangle$ 为四极算符的期望值.

$$\hat{Q}_{20} = 2z^2 - x^2 - y^2, \quad \hat{Q}_{22} = x^2 - y^2, \quad (8)$$

$q_{2\mu}$ 是多极矩的约束值, $C_{2\mu}$ 是相应的刚度常数. 二次约束为系统增加了一个额外力项 $\sum_{\mu=0,2} \lambda_\mu Q_{2\mu}$, 其中 $\lambda_\mu = 2C_{2\mu}(\langle \hat{Q}_{2\mu} \rangle - q_{2\mu})$. 此外, 四极矩 $\hat{Q}_{2\mu}$ 与约束值 $q_{2\mu}$ 之间的差取决于刚度常数的值, 即 $C_{2\mu}$ 的值越小, 四极矩与相应的约束值的偏差越大. 然而, 增大刚度常数常常会导致自洽计算无法收敛. 我们使用增广拉格朗日方法^[34]确保了自洽计算过程的收敛性. 在数值计算的过程中, β 范围从 0 到 0.6, 步长为 0.05, γ 从 0° 到 60°, 步长为 5. 我们使用了 Tian 等^[35]提出的在坐标空间中可分离的有限范围配对相互作用, 由下式给出:

$$V^{PP}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = -G\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')P(r)P(r'), \quad (9)$$

式中, $\mathbf{R} = 1/2(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ 为质量中心; $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ 为相对坐标; $P(r)$ 为形状因子, 由下式给出:

$$P(r) = \frac{1}{(4\pi a^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right), \quad (10)$$

式中, G 为配对强度; a 为配对宽度. 具体数值 $G = 728 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^3$, $a = 0.644 \text{ fm}$. 此数据通过 Gogny 力 D1S 参数确定^[35], 更加具体的推导过程可在 Niksic 等^[36]论文中查看. 在此基础上, 我们计算了基态形变下的几种物理量, 其中包括比结合能, 双中子分

离能, 中子半径, 质子半径以及电荷半径.

从图 1 中可发现, $N = 40$ 时, ${}^{70}\text{Zn}$, ${}^{72}\text{Ge}$, ${}^{74}\text{Se}$, ${}^{76}\text{Kr}$ 都算出了球形极小值, 这与我们的预期相同. 当壳层闭合时, 原子核的能量最低, 也最稳定. 核子在空间中的分布趋向于均匀, 从而形成球形核. 但是除了 ${}^{70}\text{Zn}$ 外, 所有核都出现了形状共存现象或者三轴性. $N = 32$ 时, ${}^{62}\text{Zn}$, ${}^{64}\text{Ge}$, ${}^{68}\text{Kr}$ 都出现了明显的三轴形变, 这与其他理论模型预测的结果一致 (例如, 沈水法等^[37]通过自洽推转壳模型计算表明, ${}^{64}\text{Ge}$ 在基态和集体转动态下可能存在 $\gamma = -30^\circ$ 的三轴形变), ${}^{66}\text{Se}$ 也出现了形状共存现象. $N = 34$ 时, ${}^{64}\text{Zn}$, ${}^{66}\text{Ge}$, ${}^{68}\text{Se}$, ${}^{70}\text{Kr}$ 均出现了形状共存现象. 具体形变值可以查看表 1. 我们计算得出的形变值与传统的幻数核之间有明显的差异. 例如 $N = 50$ 时, ${}^{80}\text{Zn}$, ${}^{82}\text{Ge}$, ${}^{84}\text{Se}$, ${}^{86}\text{Kr}$ 均为标准球形核, 其形变值均为 0. 当然, 原子核的形变受到核子数, 核子间相互作用等多种因素的影响, 实验测量中也没有发现完美的球形核, 理论计算出原子核的形变值不为零, 并不能直接推断出壳层一定不闭合. 因此我们可以尝试通过其他物理量, 例如比结合能, 双中子分离能等来间接分析这个问题.

表 1 势能曲面极小值点, 坐标 (β, γ) 为极小值点, 第一极小值能量最低, 对应基态位置

Table 1. The minima of the potential energy surfaces. The coordinates (β, γ) specify the locations of these minima. The primary minimum, which is the deepest, corresponds to the ground state of the nucleus.

原子核	第一极小值	第二极小值	实验四极形变值/ β
${}^{62}\text{Zn}$	(0.25, 20)	无	0.216
${}^{64}\text{Zn}$	(0.23, 0)	(0.24, 60)	0.236
${}^{70}\text{Zn}$	(0, 0)	无	0.216
${}^{64}\text{Ge}$	(0.26, 27)	无	0.259
${}^{66}\text{Ge}$	(0.25, 60)	(0.24, 0)	0.172
${}^{72}\text{Ge}$	(0, 0)	(0.21, 60)	0.240
${}^{66}\text{Se}$	(0.26, 60)	(0.25, 0)	
${}^{68}\text{Se}$	(0.27, 60)	(0.25, 0)	0.242
${}^{74}\text{Se}$	(0.22, 60)	(0, 0)	0.302
${}^{68}\text{Kr}$	(0.27, 38)	无	
${}^{70}\text{Kr}$	(0.30, 60)	(0.25, 0)	
${}^{76}\text{Kr}$	(0, 0)	(0.19, 60)	0.290

图 2 展示了 Zn, Ge, Se, Kr 四条同位素链的结合能与比结合能. 图 2 中清晰地展示了原子核的结合能随着中子数的增加而增加, 实验数据与理论

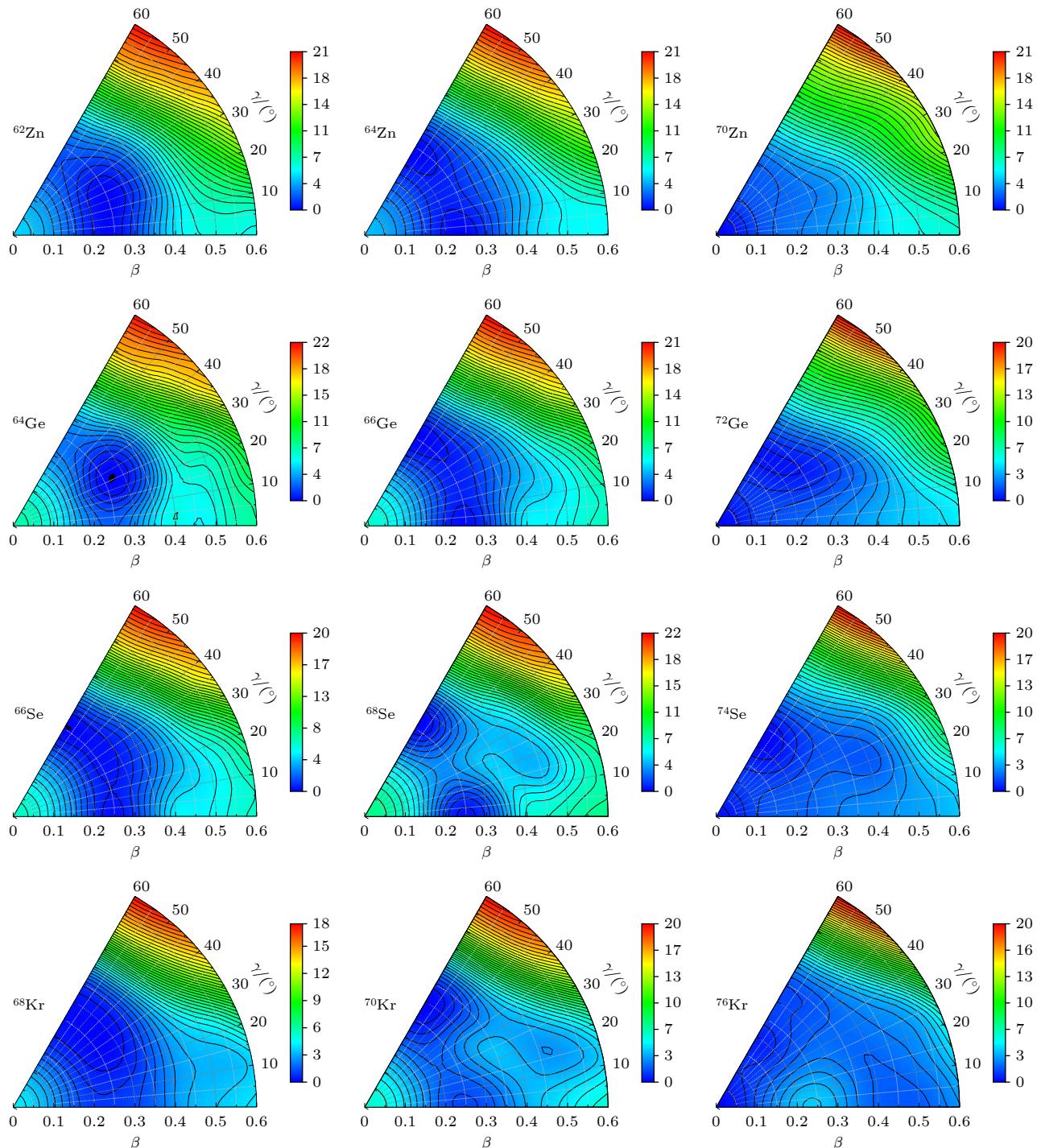


图 1 采用 DD-ME2 有效相互作用, 通过约束四极变形的三轴 RHB 计算生成中子数 $N = 32$, $N = 34$, $N = 40$ 的 Zn, Ge, Se, Kr 同位素的势能曲面. 所有势能面经过归一化处理, 最小值代表基态能量. 等高线由能量相同点连成, 相邻等高线之间的能差为 0.6 MeV

Fig. 1. The potential energy surfaces of Zn, Ge, Se, Kr isotopes, with neutron numbers $N = 32$, $N = 34$, and $N = 40$. These surfaces are generated through triaxial RHB calculations with constrained quadrupole deformation, employing the DD-ME2 effective interactions. The scale of the potential energy is consistent across all surfaces, and the lowest minimum represents the ground state. The contours join points on the surface with the same energy, and the separation between neighboring contours is 0.6 MeV.

计算符合得很好. 而在 $N = 40$ 时, ^{70}Zn , ^{72}Ge 的比结合能均达到最大值, 而 ^{74}Se , ^{76}Kr 只是接近最大值, 这可能与库仑斥力有关, 质子之间存在库仑斥

力, 这种斥力会随着质子数的增加而增大. 当质子数过多时, 库仑斥力会削弱核子之间的相互作用, 从而影响比结合能. 也可能与原子核的形变有关,

当 $N = 40$ 时, ^{70}Zn , ^{72}Ge 计算所得到的第一极小值都是球形, 而 ^{74}Se 的第一极小值是一个明显的椭球形, 这种形变会影响核子之间的相互作用与原子核的稳定性, 从而导致比结合能的变化. 但是我们认为影响最大的原因是质子数的区别. 除了中子数外, 质子数对原子核的稳定性也有着很大的影响. 当质子数和中子数都满足特定条件时, 原子核才会达到最大的比结合能, 这点在 ^{70}Zn 上体现得尤为明显.

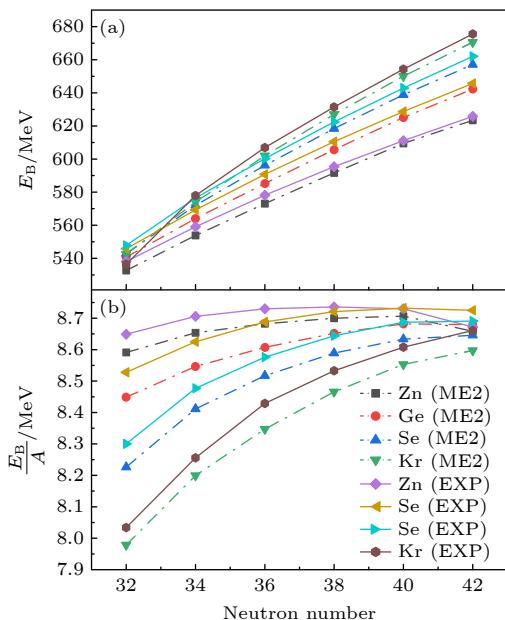


图 2 采用 DD-ME2 有效相互作用, 通过约束四极变形的三轴 RHB 计算生成中子数 $N = 32\text{--}42$ 的 Zn , Ge , Se , Kr 偶偶核同位素的结合能与比结合能, 并与参考文献 [38,39] 中的实验值进行对比

Fig. 2. The binding energy per nucleon and the total binding energy of $N = 32\text{--}42$ Zn , Ge , Se , Kr isotopes in the tri-axial RHB calculations using both the DD-ME2 interactions, with comparisons made to experimental data from Ref. [38,39].

双中子分离能被认为是研究原子核壳层结构的重要物理量. 它指的是从原子核内部分离出两个中子所需要的能量, 其计算公式为

$$S_{2n}(Z,N) = E_B(Z,N) - E_B(Z,N-2), \quad (11)$$

其中 $E_B(Z, N)$ 表示具有 Z 个质子和 N 个中子的原子核的结合能. 我们知道在传统幻数中, 如 $N = 50$ 时, 双中子分离能会出现明显的下降. 这是因为幻数核对应的核子填充了特定的壳层, 形成了满壳层或接近满壳层的结构. 再增加中子会导致这个额外的中子无法填充到已有的满壳层中, 而是需要进入下一个更高的能级. 这个额外的中子与原子核的

相互作用相对较弱, 因此移除这两个中子所需的能量会突然减小, 即双中子分离能快速下降. 在 El Adri 和 Oulne^[40] 的研究中, 就展示了 Ge , Se , Kr , Sr 同位素链在 $N = 50$ 与 $N = 70$ 时, 双中子分离能所产生的明显的下降现象. 同样, 图 3 中展示了 Zn , Ge , Se , Kr 四条同位素链的双中子分离能随着中子数 N 的变化而减小. 在 $N = 32$ 时, ^{62}Zn 与 ^{64}Ge 理论预测的双中子分离能都出现了明显的下降; $N = 34$ 时, ^{68}Se 与 ^{70}Kr 的双中子分离能都出现了明显的下降; $N = 40$ 时, ^{70}Zn , ^{72}Ge , ^{76}Kr 的双中子分离能都出现了明显的下降. 值得注意的是, 导致双中子分离能突变的原因不只是新幻数, 也可能与形变有关, 比如出现形状共存现象时, 长椭球形和扁椭球形的竞争和混合也可能导致分离能减小, 这一点在 ^{74}Se 体现得尤为明显. 在 ^{74}Se 中存在较强的球形核与长椭球形的竞争, 如果考虑第二极小值, ^{74}Se 的双中子分离能也会发生突变. 通过与实验数据进行对比, 可以观察到在部分接近质子滴线的核素中, 实验数据的趋势与理论预测存在一定偏离. 这种差异可能源于两方面原因, 一是接近质子滴线的核素测量难度大, 实验存在明显的误差; 二是理论与实验所预测的形变不同. 同时, 大部分同位素的理论计算与实验数据表现出良好的一致性.

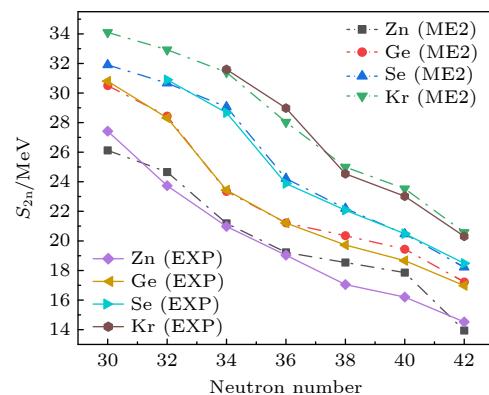


图 3 采用 DD-ME2 有效相互作用, 通过约束四极变形的三轴 RHB 计算生成中子数 $N = 32\text{--}42$ 的 Zn , Ge , Se , Kr 偶偶核同位素的双中子分离能, 并与参考文献 [38,39] 中的实验值进行对比

Fig. 3. The two-neutron separation energy for $N = 32\text{--}42$ Zn , Ge , Se , Kr isotopes, obtained through triaxial RHB calculations using the DD-ME2 interactions, with comparisons made to experimental data from Ref. [38,39].

同样地, 原子核中子、质子半径以及电荷半径也同样常被用来揭示原子核的壳层结构. 具体来说, 当核内的质子和中子数接近幻数时, 质子和中

子的分布更加紧凑, 半径较小, 反之, 未闭合的壳层会导致较大的半径和较不规则的形状。电荷半径能够反映出原子核的整体大小, 通常也与壳层结构紧密相关。由于质子带正电, 所以电荷半径是通过质子半径计算得来: $R_c = \sqrt{R_p^2 + 0.64}$, 其中 0.64 为体积修正, 通过质子体积得出。在图 4(a) 中, 可以观察到 $N = 34$ 时, ^{70}Kr 的中子半径出现了明显的突变, 在图 4(b) 中与图 4(c) 中, 观察到 $N = 34$ 时, ^{64}Zn , ^{68}Se 的电荷半径均发生了突变, $N = 40$ 时, ^{70}Zn , ^{72}Ge , ^{74}Se , ^{76}Kr 的电荷半径都处于一个转折的位置, 这个结果与前面计算出的形变值、比结合能与双中子分离能都有很好的对应。在图 4(c) 中加入了电荷半径的实验值, 可以观察到 Zn, Ge, Se 同位素链的理论预测与实验数据整体符合良好, 但 Kr 同位素链的电荷半径变化趋势与实验观测存在显著差异, 导致这一现象的原因可能是当前 RHB 理论高估了 $N = 40$ 中子闭壳效应对质子分

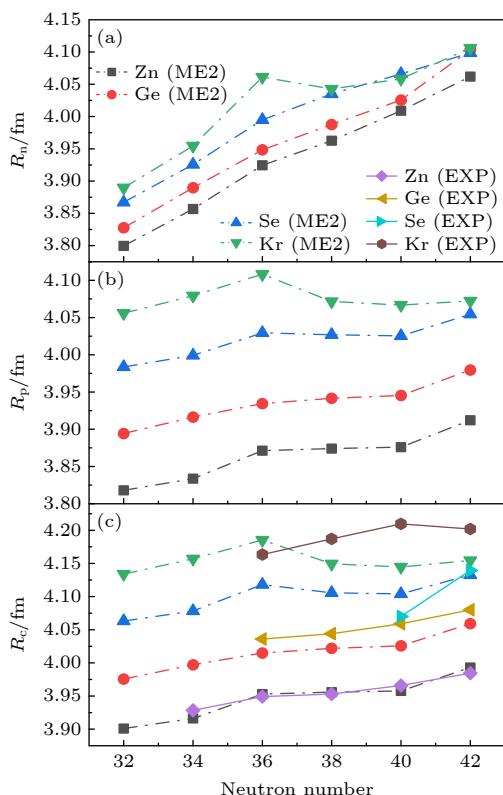


图 4 采用 DD-ME2 有效相互作用, 通过约束四极变形的三轴 RHB 计算生成中子数 $N = 32\text{--}42$ 的 Zn, Ge, Se, Kr 偶偶核同位素的中子、质子半径与电荷半径, 并与参考文献 [38,39] 中电荷半径的实验值进行对比

Fig. 4. The neutron, proton, and charge radii for $N = 32\text{--}42$ Zn, Ge, Se, Kr isotopes in the triaxial RHB calculations using the DD-ME2 interactions, with comparisons made to charge radii experimental data from Ref. [38,39].

布的刚性约束。尽管计算显示该核素维持球形基态 ($\beta \approx 0$), 但本文引用的实验数据在此处仍有明显的 β 形变值。从而使实验测量的电荷半径 (R_c) 大于理论值。当然, 现有实验数据的稀疏性进一步限制了趋势分析的可靠性: 在 $N = 34\text{--}40$ 的区间内, 已发表的 Kr 同位素电荷半径仅有 3 个数据点, 并且靠近质子滴线导致电荷半径测量依赖间接方法, 这会引入约 0.05 fm 的系统误差。可能要等待新一代放射性束流装置(如 FRIB, HIAF) 的高精度数据来进一步分析该问题^[41,42]。

4 结 论

本文采用具有密度依赖的介子交换相互作用的 RHB 理论系统地研究了 Zn, Ge, Se, Kr($32 < N < 42$) 偶偶核同位素的基态性质。计算获得的势能面清楚地揭示了原子核的三轴性与形状共存现象。通过精确定位势能面上最小值的位置, 得到了原子核基态的结合能、形变参数、双中子分离能, 以及中子、质子、电荷半径等物理性质, 讨论了形状共存与三轴性对这些原子核基态性质的影响, 以及这些原子核基态性质与壳层闭合之间存在的关联。结果表明, 新幻数 $N = 32, 34, 40$ 在一些原子核基态性质上展现出较强的稳定性。值得注意的是, $N = 32, 34$ 的潜在幻数性质呈现出显著的核素依赖性, 例如: 在 $N = 32$ 时, ^{62}Zn 和 ^{64}Ge 的双中子分离能出现了明显的下降趋势, 但相同中子数的 ^{64}Se 未表现出类似突变; 在 $N = 34$ 时, ^{68}Se 和 ^{70}Kr 的双中子分离能显著下降, 而 ^{70}Kr 的电荷半径同时出现反常增大。这种幻数效应随核区变化的现象与近期实验观测一致^[23,24,43], 表明幻数的稳定性可能受形变、连续谱效应等核结构因素的调制^[26]。在 $N = 40$ 时, 计算得到的形变参数、比结合能、双中子分离能、电荷半径所表现出的特征都支持 $N = 40$ 为新幻数这一结论。然而, 我们发现一些原子核在中子数 $N = 32, 34, 40$ 处具有三轴性并且存在形状共存现象, 这与传统幻数核的球形闭壳特征存在明显差异。未来工作可结合张量力修正、大尺度壳模型计算及新一代放射性束流装置(如 FRIB, HIAF) 的高精度数据, 进一步厘清核力参数化、质子-中子平衡与演生对称性的关联, 为极端条件下核结构的研究提供更完备的理论框架。

参考文献

- [1] Singh P, Korten W, Hagen T W, Gorgen A, Grente L, Salsac M D, Farget F, Clément E, de France G, Braueroth T, Bruyneel B, Celikovic I, Delaune O, Dewald A, Dijon A [2018 Phys. Rev. Lett.](#) **121** 192501
- [2] Abusara H, Ahmad S [2017 Phys. Rev. C](#) **96** 064303
- [3] Cejnar P, Jolie J, Casten R F [2010 Rev. Mod. Phys.](#) **82** 2155
- [4] Norman E B, Drobizhev A, Gharibyan N, Gregorich K E, Kolomensky Yu G, Sammis B N, Scielzo N D, Shusterman J A, Thomas K J [2024 Phys. Rev. C](#) **109** 055501
- [5] Majola S N T, Shi Z, Song B Y, Li Z P, Zhang S Q, Bark R A, Sharpey-Schafer J F, Aschman D G, Bvumbi S P, Bucher T D, Cullen D M, Dinoko T S, Easton J E, Erasmus N, Greenlees P T [2019 Phys. Rev. C](#) **100** 044324
- [6] Yang Y L, Zhao P W, Li Z P [2023 Phys. Rev. C](#) **107** 024308
- [7] Hua H, Wu C Y, Cline D, Hayes A B, Teng R, Clark R M, Fallon P, Goergen A, Macchiavelli A O, Vetter K [2004 Phys. Rev. C](#) **69** 014317
- [8] Cwiok S, Heenen P H, Nazarewicz W [2005 Nature](#) **433** 705
- [9] Ayangeakaa A D, Janssens R V F, Wu C Y, Allmond J M, Wood J L, Zhu S, Albers M, Almaraz-Calderon S, Bucher B, Carpenter M P, Chiara C J, Cline D, Crawford H L, Harker J, Hayes A B, Hoffman C R, Kay B P, Kolos K, Korichi A [2016 Phys. Lett. B](#) **754** 254
- [10] Sheng Z Q, Guo J Y [2008 Acta Phys. Sin.](#) **57** 1557 (in Chinese) [圣宗强, 郭建友 [2008 物理学报](#) **57** 1557]
- [11] Jiao P, Guo J Y, Fang X Z [2010 Acta Phys. Sin.](#) **59** 2369 (in Chinese) [焦朋, 郭建友, 方向正 [2010 物理学报](#) **59** 2369]
- [12] Wang G, Fang X Z, Guo J Y [2012 Acta Phys. Sin.](#) **61** 102101 (in Chinese) [王刚, 方向正, 郭建友 [2012 物理学报](#) **61** 102101]
- [13] Nomura K, Rodriguez-Guzman R, Robledo L M [2016 Phys. Rev. C](#) **94** 044314
- [14] Karim A, Siddiqui T A, Ahmad S [2022 Phys. At. Nucl.](#) **85** 588
- [15] Zhang X Y, Niu Z M, Sun W, Xia X W [2023 Phys. Rev. C](#) **108** 024310
- [16] Garcia-Ramos J E, Arias J M, Dukelsky J [2014 Phys. Lett. B](#) **736** 333
- [17] Tong H, Zhang C, Shi Z Y, Wang H, Ni S Y [2010 Acta Phys. Sin.](#) **59** 3136 (in Chinese) [童红, 张春梅, 石筑一, 汪红, 倪绍勇 [2010 物理学报](#) **59** 3136]
- [18] Bonatsos D, Assimakis I E, Minkov N, Martinou A [2017 Phys. Rev. C](#) **95** 064326
- [19] Zhi Q J [2011 Acta Phys. Sin.](#) **60** 052101 (in Chinese) [支启军 [2011 物理学报](#) **60** 052101]
- [20] Wu X H, Ren Z X, Zhao P W [2022 Phys. Rev. C](#) **105** L031303
- [21] Gupta S, Bakshi R, Gupta S, Singh S, Bharti A, Bhat G H, Sheikh J A [2023 Eur. Phys. J. A](#) **59** 258
- [22] Lu X T, Jiang D X, Ye Y L [2000 Nuclear Physics](#) (Beijing: Atomic Energy Press) p192 (in Chinese) [卢希庭, 江栋兴, 叶沿林 2000 原子核物理 (北京: 原子能出版社) 第 192 页]
- [23] Wienholtz F, Beck D, Blaum K, Borgmann C, Breitenfeldt M, Cakirli R B, George S, Herfurth F, Holt J D, Kowalska M, Kreim S, Lunney D, Manea V, Menendez J, Neidherr D, Rosenbusch M, Schweikhard L, Schwenk A, Simonis J, Stanja J, Wolf R N, Zuber K [2013 Nature](#) **498** 346
- [24] Steffenbeck D, Takeuchi S, Aoi N, Doornenbal P, Matsushita M, Wang H, Baba H, Fukuda N, Go S, Honma M, Lee J, Matsui K, Michimasa S, Motobayashi T, Nishimura D, Otsuka T, Sakurai H, Shiga Y, Soderstrom P A, Sumikama T, Suzuki H, Taniuchi R, Utsuno Y, Valiente-Dobon J J, Yoneda K [2013 Nature](#) **502** 207
- [25] Michimasa S, Kobayashi M, Kiyokawa Y, Ota S, Ahn D S, Baba H, Berg G P A, Dozono M, Fukuda N, Furuno T, Ideguchi E, Inabe N, Kawabata T, Kawase S, Kisamori K, Kobayashi K, Kubo T, Kubota Y, Lee C S, Matsushita M, Miya H, Mizukami A, Nagakura H, Nishimura D, Oikawa H, Sakai H, Shimizu Y, Stoltz A, Suzuki H, Takaki M, Takeda H, Takeuchi S, Tokieda H, Uesaka T, Yako K, Yamaguchi Y, Yanagisawa Y, Yokoyama R, Yoshida K, Shimoura S [2018 Phys. Rev. Lett.](#) **121** 022506
- [26] Liu J, Niu Y F, Long W H [2020 Phys. Lett. B](#) **806** 135524
- [27] Zhang W, Huang J K, Sun T T, Peng J, Zhang S Q [2024 Chin. Phys. C](#) **48** 104105
- [28] Ring P [1996 Prog. Part. Nucl. Phys.](#) **37** 193
- [29] Vretenar D, Afanasjev A V, Lalazissis G A, Ring P [2005 Phys. Rep.](#) **409** 101
- [30] Meng J, Toki H, Zhou S G, Zhang S Q, Long W H, Geng L S [2006 Prog. Part. Nucl. Phys.](#) **57** 470
- [31] Liang H Z, Meng J, Zhou S G [2015 Phys. Rep.](#) **570** 1
- [32] Niksic T, Paar N, Vretenar D, Ring P [2014 Comput. Phys. Commun.](#) **185** 1808
- [33] Ring P, Schuck P [1981 Phys. Today](#) **36** 70
- [34] Staszack A, Stoitsov M, Baran A, Nazarewicz W [2010 Eur. Phys. J. A](#) **46** 85
- [35] Tian Y, Ma Z Y, Ring P [2009 Phys. Lett. B](#) **676** 44
- [36] Niksic T, Ring P, Vretenar D, Tian Y, Ma Z Y [2010 Phys. Rev. C](#) **81** 054318
- [37] Shen S F, Wang H L, Meng H Y, Yan Y P, Shen J J, Wang F P, Jiang H B, Bao L N [2021 Acta Phys. Sin.](#) **70** 192101 (in Chinese) [沈水法, 王华磊, 孟海燕, 阎玉鹏, 沈洁洁, 王飞鹏, 蒋海滨, 包莉娜 [2021 物理学报](#) **70** 192101]
- [38] Wang M, Huang W J, Kondev F G, Audi G, Naimi S [2021 Chin. Phys. C](#) **45** 030003
- [39] Wang S J, Kanellakopoulos A, Yang X F, Bai S W, Billowes J, Bissell M L, Blaum K, Cheal B, Devlin C S, Garcia Ruiz R F, Han J Z, Heylen H, Kaufmann S, König K, Koszorus Á, Lechner S, Malbrunot-Ettenauer S, Nazarewicz W, Neugart R, Neyens G, Nörtershäuser W, Ratajczyk T, Reinhard P G, Rodríguez L V, Sels S, Xie L, Xu Z Y, Yordanov D T, Yu Y M [2024 Phys. Lett. B](#) **856** 138867
- [40] El Adri M, Oulne M [2020 Int. J. Mod. Phys. E](#) **29** 2050089
- [41] Chen C H, Li Z K, Wang X H, Li R H, Fang F, Wang Z S, Li H X [2023 Acta Phys. Sin.](#) **72** 122902 (in Chinese) [陈翠红, 李占奎, 王秀华, 李荣华, 方芳, 王柱生, 李海霞 [2023 物理学报](#) **72** 122902]
- [42] Liu Y, Wang R, Mushtaq Z, Tian Y, He X H, Qiu H, Chen X R [2025 Chin. Phys. C](#) **49** 034103
- [43] Enciu M, Liu H N, Obertelli A, Doornenbal P, Nowacki F, Ogata K, Poves A, Yoshida K, Achouri N L [2022 Phys. Rev. Lett.](#) **129** 262501

Shape coexistence and shell effect of medium mass nuclei*

LIU Dong GUO Jianyou †

(School of Physics and Optoelectronic Engineering, Anhui University, Hefei 230601, China)

(Received 21 January 2025; revised manuscript received 28 March 2025)

Abstract

The atomic nucleus is an extremely complex quantum many-body system composed of nucleons, and its shape is determined by the number of nucleons and their interactions. The study of atomic nuclear shapes is one of the most fascinating topics in nuclear physics, providing rich insights into the microscopic details of nuclear structure. Physicists have observed significant shape coexistence phenomena and stable triaxial deformation in isotopes of Zn, Ge, Se, and Kr. This paper aims to delve deeper into the influences of shape coexistence and triaxiality on the ground-state properties of atomic nuclei, as well as to verify new magic numbers. We employ the density-dependent meson-exchange model within the framework of the relativistic Hartree-Bogoliubov (RHB) theory to systematically study the ground-state properties of even-even Zn, Ge, Se, and Kr isotopes with neutron numbers $N = 32\text{--}42$. The calculated potential energy surfaces clearly demonstrate the presence of shape coexistence and triaxial characteristics in these isotopes. By analyzing the ground-state energy, deformation parameters, two-neutron separation energy, neutron radius, proton radius, and charge radius of the atomic nucleus, we discuss the closure of nuclear shells. Our results reveal that at $N = 32$, there is an notable abrupt change in the two-neutron separation energy values of ^{62}Zn and ^{64}Ge . At $N = 34$, a significant decrease in the two-neutron separation energy values of ^{68}Se and ^{70}Kr is observed, accompanied by an abrupt change in their charge radii. Meanwhile, at $N = 40$, clear signs of shell closure are observed. The maximum specific binding energy may be correlated with the emergence of spherical nuclear structures. The shell closure not only enhances nucleon binding energy but also suppresses nuclear deformation through symmetry constraints. Our findings support $N = 40$ as a new magic number, and some results also suggest that $N = 32$ and $N = 34$ can be new magic numbers. Notably, triaxial deformation plays a crucial role here. Furthermore, we explore the potential correlation between triaxiality and shape coexistence in the ground-state properties of atomic nuclei and analyze the physical mechanisms behind these changes.

The discrepancies between current theoretical predictions and experimental data reflect the limitations of modeling higher-order many-body correlations (e.g. three-nucleon forces) and highlight challenges in experimental measurements for extreme nuclear regions (including neutron-rich and near-proton-drip-line regions). Future studies will combine tensor force corrections, large-scale shell model calculations, and high-precision data from next-generation radioactive beam facilities (e.g. FRIB and HIAF) to clarify the interplay among nuclear force parameterization, proton-neutron balance, and emergent symmetry, thereby providing a more comprehensive theoretical framework for studying the nuclear structures under extreme conditions.

Keywords: shape coexistence, shell effect, new magic numbers

PACS: 21.10.Ft, 21.10.Ky, 21.10.Hw

DOI: [10.7498/aps.74.20250095](https://doi.org/10.7498/aps.74.20250095)

CSTR: [32037.14.aps.74.20250095](https://cstr.ia.ac.cn/32037.14.aps.74.20250095)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12475115, 11935001, 11575002).

† Corresponding author. E-mail: jianyou@ahu.edu.cn



中等质量核形状共存与壳效应研究

刘冬 郭建友

Shape coexistence and shell effect of medium mass nuclei

LIU Dong GUO Jianyou

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 74, 112102 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250095

CSTR: 32037.14.aps.74.20250095

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250095>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

原子核质量模型的检验

Test of nuclear mass models

物理学报. 2021, 70(10): 102101 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201734>

二维电介质光子晶体中量子自旋与谷霍尔效应共存的研究

Coexistence of quantum spin and valley hall effect in two-dimensional dielectric photonic crystals

物理学报. 2023, 72(7): 074205 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20221814>

界面电子结构对核壳量子点/聚乙烯纳米复合绝缘电导与空间电荷特性的影响

Effect of interfacial electronic structure on conductivity and space charge characteristics of core-shell quantum dots/polyethylene nanocomposite insulation

物理学报. 2024, 73(12): 127702 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20232041>

活性浴中惰性粒子形状对有效作用力的影响

Effect of passive particle shape on effective force in active bath

物理学报. 2024, 73(15): 158202 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240650>

单颗粒 NaYF_4 核壳结构的能量传递特性

Energy transfer characteristics of single-particle NaYF_4 core-shell structure

物理学报. 2022, 71(23): 234206 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221454>

正负磁阻共存的 $\text{Fe}/\text{Bi}_{0.5}\text{Sb}_{1.5}\text{Te}_3$ 热电磁薄膜

$x\text{Fe}/\text{Bi}_{0.5}\text{Sb}_{1.5}\text{Te}_3$ thermoelectromagnetic films with coexistence of positive and negative magnetoresistance

物理学报. 2024, 73(22): 227301 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240701>