

# 具有 $(2m+1)$ 次非线性项和时空变系数的广义 $(n+1)$ 维薛定谔方程的相似变换和精确解\*

王岗伟<sup>1)2)†</sup> 谭子轩<sup>1)</sup>

1) (河北经贸大学数学与统计学院, 石家庄 050061)

2) (河北经贸大学微分方程及其应用研究中心, 石家庄 050061)

(2025 年 2 月 24 日收到; 2025 年 3 月 18 日收到修改稿)

薛定谔型方程是一类十分重要的微分方程. 高维及变系数薛定谔型方程的研究具有一定价值和意义. 本文利用相似变换推导了  $(n+1)$  维  $(2m+1)$  次变系数非线性薛定谔方程的一类新的孤子解, 给出了系数之间满足的关系. 并利用定态薛定谔方程的解, 得到了  $(n+1)$  维  $(2m+1)$  次变系数非线性薛定谔方程的明暗孤子解. 最后, 对于特殊的情况, 给出了明暗孤立子解的图像, 并系统分析了孤子解的空间结构和传播特性.

**关键词:**  $(n+1)$  维  $(2m+1)$  次非线性薛定谔方程, 相似变换, 精确解

**PACS:** 02.30.Jr, 04.20.Jb, 05.45.Yv, 52.35.Mw

**DOI:** [10.7498/aps.74.20250225](https://doi.org/10.7498/aps.74.20250225)

**CSTR:** [32037.14.aps.74.20250225](https://cstr.cn/32037.14.aps.74.20250225)

## 1 引言

非线性薛定谔方程 (nonlinear Schrödinger equation, NLSE)

$$iu_t + \alpha u_{xx} + \gamma |u|^2 u + \delta u = 0 \quad (1)$$

是研究非线性波现象 [1] 的基本模型, 其中  $u$  表示复波包振幅,  $\alpha$  控制色散或衍射效应,  $\gamma$  描述非线性相互作用. 在非线性光学 [2–4]、流体动力学 [5,6]、玻色-爱因斯坦凝聚体 [7–9] 和等离子体物理学 [5] 中有广泛的应用. 作为描述色散和非线性之间相互作用的经典方程, NLSE 具有多种非线性波特性, 包括孤子 [2]、呼吸波 [10] 和怪波 [11,12], 例如孤子干涉过程中的相位演化特性 [13]. 文献 [14] 考虑了特殊的 NLSE 与 Korteweg-de Vries (KdV) 方程的耦合系统. 温嘉美等 [15] 构造了耦合自散焦饱和非线性薛定谔方程. 对高维和高阶 NLSE 的研究获得越来越多的

关注, 楼森岳等 [16] 使用形变术导出了许多高维可积方程, 高维 NLSE 对于理解多维、强非线性系统中的复杂波动力学至关重要. 然而, 为这种广义系统构建解析解并分析其性质仍然具有重要的价值.

孤子解的研究对于高维 NLSE 尤为重要, 因为孤子是描述局域能量转移和非线性波传播稳定性的核心模型. 明孤子表现为振幅局域化结构, 而暗孤子表现为局域化波谷 [17], 以及特殊的明暗孤子混合的特殊孤子 [18]. 孤子的稳定性和动态特性为非线性波传播机制提供了深刻的理论见解. 廖秋雨等 [19] 研究了高维空间光孤子的特性. 尽管已有一些研究, 但高维、高阶、变系数 NLSE 孤子解的构建和分类仍然不完整, 对其动态行为的深入分析值得进一步探索.

本文作者王岗伟 [20] 应用相似变换推导出了  $(2+1)$  维的三次非线性薛定谔方程的一组新解. 并在此基础上, 扩展了求解  $(3+1)$  维三次非线性薛定

\* 河北省自然科学基金 (批准号: A2023207002)、河北省三三三人才工程基金 (批准号: C20221021)、河北经贸大学重点项目 (批准号: 2020ZD11, 2023ZD10, 2024ZD12) 和河北经贸大学青年团队支持计划资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [gangwei@hueb.edu.cn](mailto:gangwei@hueb.edu.cn)

谔方程的方法。本文是对参考文献 [20,21] 的深入研究和拓展。当  $n = 3$  和  $m = 1$  时, 退化为参考文献 [21] 的结果。当  $n = 2$  和  $m = 1$  时, 简化为参考文献 [20] 的结果。因此, 本文给出了更一般的结论, 将薛定谔方程推广为  $(n+1)$  维的  $(2m+1)$  次非线性薛定谔方程

$$iu_t + \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + \gamma |u|^{2m} u + \delta u = 0, \quad (2)$$

其中含有与标准薛定谔方程相同的时间项和外势项, 本文考虑更高维的色散效应, 于是将二阶色散项扩展为  $n$  阶。相似地, 将二阶非线性效应扩展为  $(2m+1)$  次, 适用于多体碰撞、高阶极化率、复杂介质等高密度高强度的极端条件, 是超越平均场理论或弱非线性近似的修正。方程 (2) 的难点在于对其的相似变换得到的方程组是高维的, 这意味着该方程组的解是相当复杂的。本文发现低维方程组的方法可以应用到高维方程组中, 它们的解之间有相似的结构。

采用相似变换 [20] 结合稳态薛定谔方程, 本文推导出了一类新的  $(n+1)$  维的  $(2m+1)$  次 NLSE 的孤子解。自相似解是 NLSE 研究中的重要方向, 广泛出现在高功率光纤放大器、等离子体涡旋以及非均匀介质中的波传播问题中。这类解的数学形式通常为

$$u(x, t) = \rho(x, t) e^{i\varphi(x, t)} U(x, t), \quad (3)$$

其中  $\rho$  描述波包的自适应演化, 相位函数  $\varphi$  反映群速度与频率偏移的动态调制, 自相似解的构造依赖于变量变换及对称群方法, 并在非均匀系数的 NLSE (如带有增益-损耗项或外势场的系统) 中展现出特殊的动力学行为。本文将解分为明孤子和暗孤子, 详细分析它们在不同参数条件下的空间分布、相位结构和稳定性。通过数值模拟, 展示了孤子解的动态传播特性以及非线性和色散之间的平衡机制, 为研究高维非线性波系统提供了新的理论见解和工具。

这项工作的主要贡献如下: 基于相似变换, 推导了  $(n+1)$  维的  $(2m+1)$  次 NLSE 的孤子解, 扩大了高阶非线性波动方程孤子解的研究范围; 通过对孤子的空间结构、相位分布和动态稳定性的系统研究, 确定了它们的不同特征。通过三维图、相位图直观地展示了解的动态行为, 验证了孤子解的准确性和稳定性; 本研究丰富了高维非线性方程组的理论框架, 为进一步探索高维非线性波动力学提

供了一定的理论依据, 并为物理系统中的孤子动力学提供了潜在的应用。

本文的结构如下: 第 2 节推导了高维 NLSE 的新孤子解; 第 3 节对特殊情况分析了明孤子和暗孤子解, 研究了它们在各种参数下的特性, 并将结果可视化。

## 2 变系数 $(n+1)$ 维 NLSE 的相似变换

对于  $(n+1)$  维  $(2m+1)$  次 NLSE,

$$iu_t + \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + \gamma |u|^{2m} u + \delta u = 0, \quad (4)$$

利用相似变换 [20]

$$\begin{aligned} u &= \rho(x_1, x_2, \dots, x_n, t) e^{i\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, t)} \\ &\times U(\xi(x_1, x_2, \dots, x_n, t)), \end{aligned} \quad (5)$$

式中的  $U$  为不含时定态薛定谔方程的解,  $E$  为分离常量,  $U_{\xi\xi}$  为二阶色散项,  $G|U|^{2m}U$  为对应的非线性项,  $G$  为常数, 方程如下:

$$EU = -U_{\xi\xi} + G|U|^{2m}U, \quad (6)$$

其中

$$\xi \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad (7)$$

缩写为

$$u = \rho e^{i\varphi} U. \quad (8)$$

将方程 (5) 和方程 (6) 代入方程 (2), 可以得到

$$\begin{aligned} &\gamma U^{2m+1} \rho^{2m+1} + iU\rho_t - \varphi_t U\rho + i\xi_t U_\xi \rho + \delta U\rho \\ &+ 2iU_\xi \rho (\xi_{x_1} \varphi_{x_1} + \xi_{x_2} \varphi_{x_2} + \dots + \xi_{x_n} \varphi_{x_n}) \\ &+ 2iU (\rho_{x_1} \varphi_{x_1} + \rho_{x_2} \varphi_{x_2} + \dots + \rho_{x_n} \varphi_{x_n}) \\ &+ iU\rho (\varphi_{x_1 x_1} + \varphi_{x_2 x_2} + \dots + \varphi_{x_n x_n}) \\ &+ U (\rho_{x_1 x_1} + \rho_{x_2 x_2} + \dots + \rho_{x_n x_n}) \\ &+ \rho U_\xi (\xi_{x_1 x_1} + \xi_{x_2 x_2} + \dots + \xi_{x_n x_n}) \\ &- U\rho (\varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 + \dots + \varphi_{x_n}^2) \\ &+ \rho (GU^{2m+1} - EU) (\xi_{x_1}^2 + \xi_{x_2}^2 + \dots + \xi_{x_n}^2) \\ &+ U_\xi (\xi_{x_1} \rho_{x_1} + \xi_{x_2} \rho_{x_2} + \dots + \xi_{x_n} \rho_{x_n}). \end{aligned} \quad (9)$$

对  $U$  及其导数的不同子项进行分类, 并将它们的系数分别设为零, 得到以下方程组:

$$\rho_t + 2 \sum_{i=1}^n \rho_{x_i} \varphi_{x_i} + \rho \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i x_i} = 0, \quad (10a)$$

$$\rho \xi_t + 2\rho \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i} \xi_{x_i} = 0, \quad (10b)$$

$$\rho \sum_{i=1}^n \xi_{x_i x_i} + 2 \sum_{i=1}^n \rho_{x_i} \xi_{x_i} = 0, \quad (10c)$$

$$\sum_{i=1}^n \rho_{x_i x_i} - \rho \left( \varphi_t + \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}^2 \right) - \delta \rho - E \rho \sum_{i=1}^n \xi_{x_i}^2 = 0, \quad (10d)$$

$$\gamma \rho^{2m+1} - G \rho \sum_{i=1}^n \xi_{x_i}^2 = 0. \quad (10e)$$

根据方程 (10d) 和方程 (10e), 可知

$$\begin{aligned} \delta &= \rho^{-1} \sum_{i=1}^n \rho_{x_i x_i} - \left( \varphi_t + \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}^2 \right) - E \sum_{i=1}^n \xi_{x_i}^2, \\ \gamma &= G \rho^{-2m} \sum_{i=1}^n \xi_{x_i}^2. \end{aligned} \quad (11)$$

从方程 (10b) 和方程 (10c), 可以推出一组解:

$$\Psi = p \sum_{i=1}^n x_i + q, \quad \xi = f(\Psi), \quad \rho = \sqrt{\frac{p}{\xi_\Psi}}, \quad (12)$$

这里的  $p, q$  是关于  $t$  的任意函数.

将方程 (12) 代入方程 (10a), 可以得到

$$\begin{aligned} &- \frac{\sqrt{p/\xi_\Psi}}{2\xi_\Psi} \left( 2p \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i} + p_t \sum_{i=1}^n x_i + p_t q_t \right) \xi_{\Psi\Psi} \\ &- \frac{\sqrt{p/\xi_\Psi}}{2\xi_\Psi p} \left( 2p \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i x_i} + p_t \right) \xi_\Psi = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

这个解的形式为

$$\varphi = -\frac{p_t}{c_1 p} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{p_t}{c_2 p} \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^n x_i x_j - \frac{q_t}{c_2 p} \sum_{i=1}^n x_i + c, \quad (14)$$

其中  $c_1, c_2$  都为常数,  $c$  是关于  $t$  的任意函数, 并且  $i \neq j, j > i$ .

将方程 (14) 代入方程 (10a) 有

$$c_1 = 4n, \quad c_2 = 2n. \quad (15)$$

最后, 得到了广义  $(n+1)$  维的  $(2m+1)$  次非线性薛定谔方程的一个新解:

$$\begin{cases} \Psi = p \sum_{i=1}^n x_i + q, \quad \xi = f(\Psi), \quad \rho = \sqrt{p/\xi_\Psi}, \\ \varphi = -\frac{p_t}{4np} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{p_t}{2np} \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^n x_i x_j \\ \quad - \frac{q_t}{2np} \sum_{i=1}^n x_i + c, \end{cases} \quad (16)$$

这里  $p, q, c$  是关于  $t$  的任意函数, 并且  $i \neq j, j > i$ .

### 3 孤子解

#### 3.1 明暗孤子解

对于方程 (6), 将孤子解的形式设为

$$U(\xi) = A \operatorname{sech}^p(k\xi). \quad (17)$$

将方程 (17) 代入方程 (6), 得到

$$\begin{aligned} &Apk^2 \operatorname{sech}^{p+2}(k\xi) - Ap^2 k^2 \operatorname{sech}^p(k\xi) \\ &+ Ap^2 k^2 \operatorname{sech}^{p+2}(k\xi) - EA \operatorname{sech}^p(k\xi) \\ &+ GA^{2m+1} \operatorname{sech}^{(2m+1)p}(k\xi). \end{aligned} \quad (18)$$

平衡最高阶的系数, 有

$$p+2 = (2m+1)p, \quad p = m^{-1}. \quad (19)$$

根据方程 (18), 可以得到下方程:

$$\begin{cases} Am^{-2} k^2 + EA = 0, \\ Am^{-1} k^2 + Am^{-2} k^2 + GA^{2m+1} = 0, \end{cases} \quad (20)$$

所以, 可知

$$\begin{cases} k = m \sqrt{-E}, \\ A = m \sqrt{-E} \sqrt[2m]{-G^{-1}(m^{-1} + m^{-2})}, \\ U = m \sqrt{-E} \sqrt[2m]{-G^{-1}(m^{-1} + m^{-2})} \\ \times \operatorname{sech}^{m^{-1}}(m \sqrt{-E} \xi), \end{cases} \quad (21)$$

假定

$$\xi = p \sum_{i=1}^n x_i + q, \quad \rho = \sqrt{p}, \quad (22)$$

然后可以得到

$$\begin{cases} \delta = \frac{(p_{tt}p - 2p_t^2)}{4np^2} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \\ \quad + \frac{(q_{tt}p - 2q_t p_t)}{2np^2} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \\ \quad - c_t - 3Ep^2 - \frac{q_t^2}{4np^2}, \\ \gamma = np^{2-m} G. \end{cases} \quad (23)$$

根据方程 (5), 设  $q = c = 0$  并得到方程 (4) 的孤子解为

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{p} e^{i\varphi} m \sqrt{-E} \sqrt[2m]{-G^{-1}(m^{-1} + m^{-2})} \\ &\times \operatorname{sech}^{m^{-1}}(m \sqrt{-E} \xi), \end{aligned} \quad (24)$$

这里有

$$\varphi = -\frac{p_t}{4np} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{p_t}{2np} \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^n x_i x_j, \quad i \neq j, j > i. \quad (25)$$

同理, 它的暗孤子解是

$$u = \sqrt{p} e^{i\varphi} m \sqrt{-E} \sqrt[2m]{-G^{-1}(m^{-1} + m^{-2})} \times \tanh^{m^{-1}}(m\sqrt{-E}\xi). \quad (26)$$

### 3.2 解的图像

本文假定

$$\begin{cases} n = 3, \quad m = 2, \\ E = G = -1. \end{cases} \quad (27)$$

选取不同的  $p$  和  $\sigma$  可以得到大量的孤子解, 本文仅考虑下面的几种情况:

$$\begin{aligned} p_0 &= \sin t, \quad \sigma_0 = \frac{\cos t}{12 \sin t}; \\ \left\{ \begin{array}{l} p_1 = 1 + \frac{\cos(0.5t) + i \sinh(-0.5t)}{\cos(0.5t) - \cosh(0.5t + 0.2)}, \\ \sigma_1 = \frac{-0.5 \sin(0.5t) - 0.5i \cosh(0.5t)}{\cos(0.5t) - \cosh(0.5t + 0.2)} - \frac{[\cos(0.5t) - i \sinh(0.5t)][-0.5 \sin(0.5t) - 0.5 \sinh(0.5t + 0.2)]}{[\cos(0.5t) - \cosh(0.5t + 0.2)]^2} \\ \quad 12 \left[ 1 + \frac{\cos(0.5t) - i \sinh(0.5t)}{\cos(0.5t) - \cosh(0.5t + 0.2)} \right]; \end{array} \right. \\ p_2 &= \sinh(t), \quad \sigma_2 = \frac{\cosh(t)}{12 \sinh(t)}. \end{aligned} \quad (28)$$

明孤子解的显式表达式为

$$u_1 = -\sqrt{p} e^{-i\sigma(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2i\sigma(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)} \times \sqrt{2\sqrt{3}} \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}(2p(x_1 + x_2 + x_3)), \quad (29)$$

选定  $p = p_0, \sigma = \sigma_0$ , 方程 (29) 的图像见图 1. 选定  $p = p_1, \sigma = \sigma_1$ , 方程 (29) 的图像见图 2.

暗孤子解的显式形式为

$$u_2 = -\sqrt{p} e^{-i\sigma(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2i\sigma(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)} \times \sqrt{2\sqrt{3}} \tanh^{\frac{1}{2}}[2p(x_1 + x_2 + x_3)], \quad (30)$$

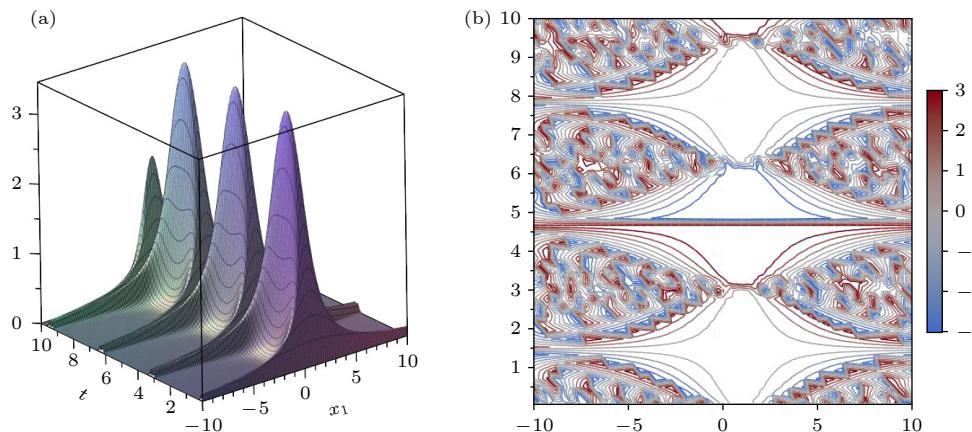


图 1 方程 (29) 的一种明孤子解, 展示的图像为  $|u|^2$ . 其中  $x_1 \in [-10, 10]$ ,  $t \in [0, 10]$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = 2$  (a) 三维图; (b) 相位图  
Fig. 1. Bright soliton solution of Eq.(29), shown as  $|u|^2$ , where  $x_1 \in [-10, 10]$ ,  $t \in [0, 10]$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = 2$ : (a) 3-dimensional image; (b) phase image.

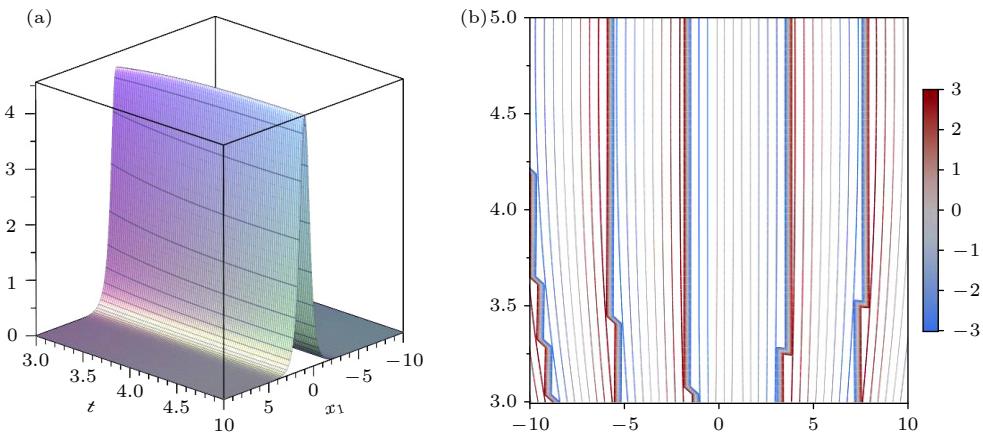


图 2 方程(29)的一种明孤子解, 展示的图像为  $|u|^2$ . 其中  $x_1 \in [-10, 10]$ ,  $t \in [3, 5]$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = 2$  (a) 三维图; (b) 相位图  
Fig. 2. Bright soliton solution of Eq.(29), shown as  $|u|^2$ , where  $x_1 \in [-10, 10]$ ,  $t \in [3, 5]$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = 2$ : (a) 3-dimensional image; (b) phase image.

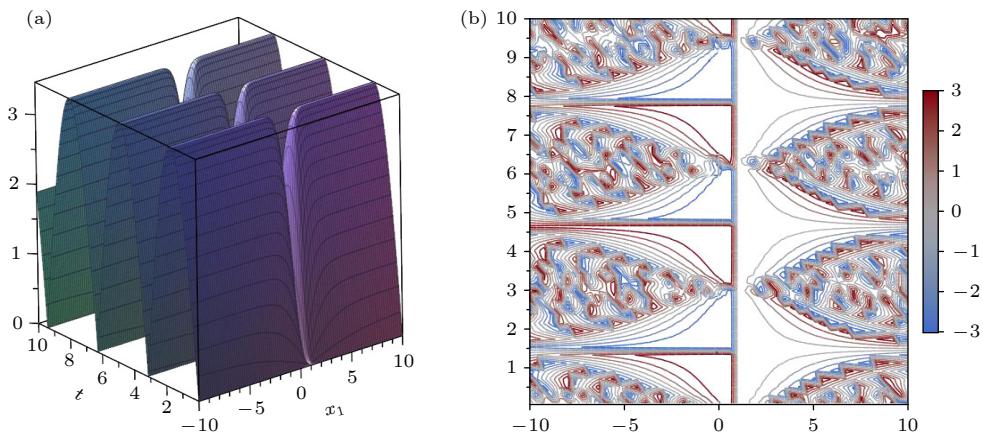


图 3 方程(30)的一种暗孤子解, 展示的图像为  $|u|^2$ . 其中  $x \in [-10, 10]$ ,  $t \in [0, 10]$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = 2$  (a) 三维图; (b) 相位图  
Fig. 3. Dark soliton solution of Eq.(30), shown as  $|u|^2$ , where  $x_1 \in [-10, 10]$ ,  $t \in [0, 10]$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = 2$ : (a) 3-dimensional image; (b) phase image.

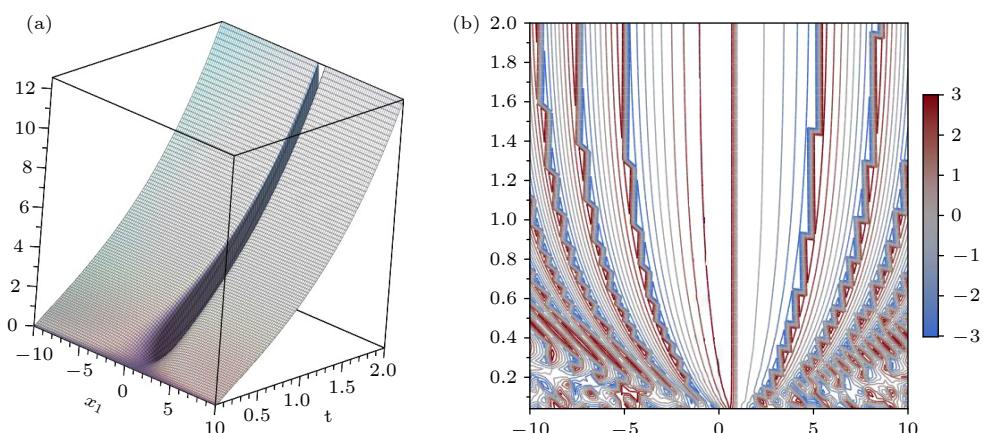


图 4 方程(30)的一种暗孤子解, 展示的图像为  $|u|^2$ . 其中  $x \in [-10, 10]$ ,  $t \in [0, 2]$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = 2$  (a) 三维图; (b) 相位图  
Fig. 4. Dark soliton solution of Eq.(30), shown as  $|u|^2$ , where  $x_1 \in [-10, 10]$ ,  $t \in [0, 2]$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = 2$ : (a) 3-dimensional image; (b) phase image.

## 4 结 论

通过使用相似变换, 本研究构建了  $(n+1)$  维  $(2m+1)$  次变系数非线性薛定谔方程的孤子解, 对于特殊情况, 深入研究了其明孤子和暗孤子在各种条件下的传播特性和动态行为. 结果表明, 明孤子表现出稳定传播的局域单峰结构, 而暗孤子表现出能量耗尽的槽结构. 验证了解的准确性和孤子波的稳定性. 这些发现扩大了非线性薛定谔方程孤子解的研究范围, 并为研究高维非线性波的动力学提供了新的视角. 未来的工作将探索更复杂的物理背景下的模型及孤子相互作用和演化.

## 参考文献

- [1] Zhong M, Malomed B A, Yan Z 2024 *Phys. Rev. E* **110** 014215
- [2] Malomed B A 2024 *Chaos* **34** 022102
- [3] Kudryashov N A, Nifontov D R, Biswas A 2024 *Phys. Lett. A* **528** 130037
- [4] Wang T Y, Zhou Q, Liu W J 2022 *Chin. Phys. B* **31** 020501
- [5] Lü X, Zhu H W, Yao Z Z, Meng X H, Zhang C, Zhang C Y, Tian B 2008 *Ann. Phys.* **323** 1947
- [6] Gong R Z, Wang D S 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 100503 (in Chinese) [公睿智, 王灯山 2023 物理学报 **72** 100503]
- [7] Pérez-García V M, Pardo R 2009 *Physica D* **238** 1352
- [8] Dinh V D 2022 *Nonlinear Anal.* **214** 112587
- [9] Rizvi S T R, Seadawy A R, Farah N, Ahmad S 2022 *Chaos, Solitons Fractals* **159** 112128
- [10] Yang Z, Zhong W P, Belić, M R 2023 *Phys. Lett. A* **465** 128715
- [11] Djelalah G, Ndzana F I I, Abdoulkary S, English L Q, Mohamadou A 2024 *Phys. Lett. A* **518** 129666
- [12] Rao J G, Chen S A, Wu Z J, He J S 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 104204 (in Chinese) [饶继光, 陈生安, 吴昭君, 贺劲松 2023 物理学报 **72** 104204]
- [13] Sun B, Zhao L C, Liu J 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 100501 (in Chinese) [孙斌, 赵立臣, 刘杰 2023 物理学报 **72** 100501]
- [14] Pei Y T, Wang J K, Guo B L, Liu W M 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 100201 (in Chinese) [裴一潼, 王锦坤, 郭柏灵, 刘伍明 2023 物理学报 **72** 100201]
- [15] Wen J M, Bo W B, Wen X K, Dai C Q 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 100502 (in Chinese) [温嘉美, 薄文博, 温学坤, 戴朝卿 2023 物理学报 **72** 100502]
- [16] Lou S Y, Hao X Z, Jia M 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 100204 (in Chinese) [楼森岳, 郝夏芝, 贾曼 2023 物理学报 **72** 100204]
- [17] Rao J, Mihalache D, Ma M, He J 2024 *Phys. Lett. A* **493** 129244
- [18] Yang J Q, Liu W J 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 100504 (in Chinese) [杨佳奇, 刘文军 2023 物理学报 **72** 100504]
- [19] Liao Q Y, Hu H J, Chen M W, Shi Y, Zhao Y, Hua C B, Xu S L, Fu Q D, Ye F W, Zhou Q 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 104202 (in Chinese) [廖秋雨, 胡恒洁, 陈懋薇, 石逸, 赵元, 花春波, 徐四六, 傅其栋, 叶芳伟, 周勤 2023 物理学报 **72** 104202]
- [20] Wang G 2016 *Appl. Math. Lett.* **56** 56
- [21] Zhang J, Wang G 2025 *Appl. Math. Lett.* **159** 109286

# Similarity transformations and exact solutions of the generalized $(n+1)$ -dimensional Schrödinger equation with $(2m+1)$ th order nonlinear terms and spatiotemporally varying coefficients\*

WANG Gangwei<sup>1)2)†</sup> TAN Zixuan<sup>1)</sup>

1) (School of Mathematics and Statistics, Hebei University of Economics and Business, Shijiazhuang 050061, China)

2) (Center for Differential Equations and Their Applications, Hebei University of Economics and Business, Shijiazhuang 050061, China)

(Received 24 February 2025; revised manuscript received 18 March 2025)

## Abstract

Schrödinger-type equations represent a fundamentally important class of differential equations. Research on high-dimensional variable-coefficient Schrödinger-type equations as important theoretical and practical value, providing critical insights into the dynamics of complex wave phenomena. In this paper, we employ similarity transformations to derive a novel class of soliton solutions for the  $(n+1)$ -dimensional  $(2m+1)$ th-order variable-coefficient nonlinear Schrödinger equation. By extending similarity transformations from lower-dimensional to higher dimensionnal equations, we establish the intrinsic relationships among the equation's coefficients. Furthermore, utilizing the solutions of the stationary Schrödinger equation and using the balancing-coefficient method, we construct both bright and dark soliton solutions for the  $(n+1)$ -dimensional  $(2m+1)$ th-order variable-coefficient nonlinear Schrödinger equation. Finally, for specific cases, we present graphical representations of the bright and dark soliton solutions and conduct a systematic analysis of their spatial structures and propagation characteristics. Our results indicate that bright solitons exhibit a single-peak structure, while dark solitons form trough-like profiles, further confirming the stability of soliton wave propagation.

**Keywords:**  $(n+1)$ -dimensional  $(2m+1)$ th nonlinear Schrödinger equation, similarity transformations, exact solutions

**PACS:** 02.30.Jr, 04.20.Jb, 05.45.Yv, 52.35.Mw

**DOI:** [10.7498/aps.74.20250225](https://doi.org/10.7498/aps.74.20250225)

**CSTR:** [32037.14.aps.74.20250225](https://cstr.ia.ac.cn/32037.14.aps.74.20250225)

---

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. A202307002), the ‘333 Talent Project’ of Hebei Province, China (Grant No. C20221021), the Key Program of Hebei University of Economics and Business, China (Grant Nos. 2020ZD11, 2023ZD10, 2024ZD12), and the Youth Team Support Program of Hebei University of Economics and Business, China.

† Corresponding author. E-mail: [gangwei@hueb.edu.cn](mailto:gangwei@hueb.edu.cn)



具有 $(2m+1)$ 次非线性项和时空变系数的广义 $(n+1)$ 维薛定谔方程的相似变换和精确解

王岗伟 谭子轩

**Similarity transformations and exact solutions of the generalized  $(n+1)$ -dimensional Schrödinger equation with  $(2m+1)$ th order nonlinear terms and spatiotemporally varying coefficients**

WANG Gangwei TAN Zixuan

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 74, 110201 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250225

CSTR: 32037.14.aps.74.20250225

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250225>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

空间位移对称非局域非线性薛定谔方程的高阶怪波解

General higher-order rogue waves in the space-shifted -symmetric nonlocal nonlinear Schrödinger equation

物理学报. 2023, 72(10): 104204 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222298>

低横动量介子在强子气体中的分布

Distribution of low-  $\pi$  in hadron gas

物理学报. 2023, 72(19): 192501 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230990>

分子离子, 和态的不透明度

Molecular opacities of  $A^2\Pi_u$  and  $A^2\Sigma^+$  states of nitrogen cation

物理学报. 2022, 71(19): 193101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220734>

大气光学湍流模式研究: 廓线模式

Study of profile model by atmospheric optical turbulence model

物理学报. 2023, 72(6): 069201 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20221985>

含自旋-轨道耦合的光谱常数计算

Calculation of spectroscopic constants with spin-orbit coupling

物理学报. 2025, 74(2): 023101 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20241435>

基于跃迁的CaH分子激光冷却光谱理论研究

Theoretical investigation into spectrum of transition for CaH molecule toward laser cooling

物理学报. 2021, 70(16): 163302 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210522>