

# 等离子体中激光能量沉积系数、电子热传导系数和电阻率的统一推导\*

朱少平<sup>†</sup>

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094)

(2025 年 3 月 15 日收到; 2025 年 4 月 12 日收到修改稿)

激光能量沉积系数、电子热传导系数和电阻率是等离子体物理中的三个重要物理量, 也是激光聚变非平衡辐射流体物理模型中的关键参数。对于一个多离子组元的等离子体系统, 仅仅考虑电子与离子的碰撞相互作用, 本文基于 Fokker-Planck 近似下的动理学方程, 采用快慢时标方法, 给出了等离子体中激光能量沉积系数、电子热传导系数和电阻率的统一推导。

**关键词:** 激光能量沉积系数, 电子热传导系数, 电阻率, 统一推导

**PACS:** 52.25.Dg, 52.25.Fi, 52.25.Os, 52.38.Dx

**DOI:** [10.7498/aps.74.20250340](https://doi.org/10.7498/aps.74.20250340)

**CSTR:** [32037.14.aps.74.20250340](https://cstr.iaap.ac.cn/32037.14.aps.74.20250340)

## 1 引言

激光在等离子体中传播, 通过逆韧致吸收过程激光能量转移给等离子体, 此为激光聚变中的激光能量沉积。激光能量沉积问题是激光聚变的基础问题, 1964 年, Dawson 和 Oberman [1,2] 在讨论利用强激光产生高温等离子体时就给出了激光能量沉积系数的数学表达式, 此表达式一直被使用<sup>[3-5]</sup>。但是该表达式在激光传播临界面处发散。本文作者和合作者在文献 [6] 曾分析了导致激光能量沉积系数在临界面处发散的原因, 并从简化的动理学模型出发给出了无发散问题的激光能量沉积系数表达式。电子热传导系数和电阻率是等离子体的基础物理量。早在 20 世纪 50 年代, Spitzer 和他的合作者就在文献 [7,8] 中给出了这两个物理量的推导。自 20 世纪 70 年代开始, 随着激光聚变物理研究的深入, 研究者们又引入了限流电子热传导模型<sup>[9]</sup>和非局域电子热传导模型等概念<sup>[10-12]</sup>, 研究了电

子分布函数的非 Maxwell 特征对电子热传导过程的影响<sup>[13-16]</sup>。

本文重新讨论了等离子体中的上述经典问题, 基于动理学方程, 采用快慢时标方法, 给出了等离子体中激光能量沉积系数、电子热传导系数和电阻率的统一推导。

## 2 动理学方程

对于一个多离子组元的等离子体系统, 如果仅仅考虑电子与离子之间的碰撞, 忽略电子与电子之间的相互作用, 假定等离子体中电子分布函数为弱各向异性:

$$f_e(\mathbf{v}) = f_0(v) + \mathbf{f}_1(v) \cdot \mathbf{v}/v, \quad (1)$$

同时假定离子分布函数为 Maxwell 分布:

$$f_i = n_i \left( \frac{m_i}{2\pi k_B T_i} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{m_i v^2}{2k_B T_i} \right\}. \quad (2)$$

这里  $n_i$ ,  $m_i$  和  $T_i$  分别是离子的数密度、质量和温度;  $k_B$  是 Boltzmann 常数。则在 Fokker-Planck 近

\* 国家自然科学基金理论物理专款 (批准号: 12247201) 资助的课题。

† E-mail: [zhu\\_shaoping@iapcm.ac.cn](mailto:zhu_shaoping@iapcm.ac.cn)

似下有电子分布函数的时空演化方程<sup>[17]</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \\ = \sum_{\alpha} \left\{ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ \nu_{e\alpha} v^3 \left( \frac{m_e}{m_{\alpha}} f_0 + \frac{v}{2x^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) \right] \right. \\ \left. - \nu_{e\alpha} \frac{(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v})}{v} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 式忽略了磁力项, “ $\alpha$ ”代表等离子体中的第“ $\alpha$ ”类离子组元, 右边的求和“ $\alpha$ ”是对等离子体的各种离子求和. 电子与离子的碰撞频率  $\nu_{e\alpha} = \frac{4\pi e^2 e_{\alpha}^2 n_{\alpha} \ln A}{m_e^2} \times \frac{1}{v^3}$ , 变量  $x = v / \sqrt{\frac{2k_B T_{\alpha}}{m_{\alpha}}}$ ,  $v = |\mathbf{v}|$  为速度的绝对值;  $e$  为质子的电荷,  $e_{\alpha}$  为“ $\alpha$ ”类离子的电荷;  $m_e$  为电子的质量,  $m_{\alpha}$  为“ $\alpha$ ”类离子的质量,  $n_{\alpha}$  为“ $\alpha$ ”类离子的数密度,  $\ln A$  为库仑对数. 与分布函数方程 (3) 相耦合的电磁场方程为 Maxwell 方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -c \nabla \times \mathbf{E}, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= c \nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{j}, \\ \mathbf{j} &= -e \int f_e(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (4)$$

利用数学关系:

$$\Omega = \frac{\mathbf{v}}{v} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta),$$

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi,$$

$$\begin{aligned} \int d\Omega &= 4\pi, \int \Omega d\Omega = 0, \int \Omega (\Omega \cdot \mathbf{A}) d\Omega = \frac{4\pi}{3} \mathbf{A}, \\ \frac{\partial (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{A}, \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial v}. \end{aligned}$$

方程 (3) 对  $d\Omega$  积分, 得分布函数的各向同性部分满足的方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_1 - \frac{e}{3m_e v^2} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial (v^2 \mathbf{f}_1)}{\partial \mathbf{v}} \\ = \sum_{\alpha} \frac{1}{4\pi v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \nu_{e\alpha} v^3 \left[ \frac{m_e}{m_{\alpha}} f_0 + \frac{v}{2x^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

方程 (3) 乘以  $\Omega$ , 再对  $d\Omega$  积分, 得分布函数的各向异性部分满足的方程:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = - \sum_{\alpha} \nu_{e\alpha} \mathbf{f}_1. \quad (6)$$

引入参量  $\xi_{\alpha} = \frac{4\pi e^2 e_{\alpha}^2 n_{\alpha} \ln A}{m_e^2} = \frac{4\pi Z_{\alpha}^2 e^4 n_{\alpha} \ln A}{m_e^2}$ , 有

$\nu_{e\alpha} = \xi_{\alpha}/v^3$ , 方程 (6) 写为

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + \frac{1}{v^3} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{f}_1 = -v \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (7)$$

原则上, 联立求解方程 (5) 和 (7), 可以得到电子分布函数的各向同性和各向异性部分, 获得等离子体中的电流密度, 进而给出电磁场. 但实际上, 解析求解方程 (5) 和 (7) 是不可能的. 通常的做法是假定电子分布函数的各向同性部分为 Maxwell 分布, 即假定:

$$f_0 = \frac{n_e}{(\pi)^{3/2} v_{te}^3} \exp \left( -\frac{v^2}{v_{te}^2} \right), \quad (8)$$

求解分布函数的各向异性部分. 方程 (8) 中  $v_{te} = \sqrt{2k_B T_e/m_e}$ , 为电子热速度.

由方程 (1) 得等离子体的电流密度:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= -e \int f_e(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v} = -e \int \frac{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}}{v} v d\mathbf{v} \\ &= -e \int \frac{(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v})}{v} \frac{v}{v} v^3 d\mathbf{v} d\Omega = -\frac{4\pi e}{3} \int_0^{\infty} v^3 \mathbf{f}_1 dv. \end{aligned} \quad (9)$$

电流密度仅仅依赖电子分布函数的各向异性部分, 这点在物理上是显然的.

### 3 激光能量沉积系数

激光在等离子体中传播, 引起等离子体扰动, 等离子体发生电荷分离和各向异性化, 产生电场和磁场. 从时间尺度分析, 激光在等离子体中传播时至少存在两个时间尺度, 一个是以激光周期为特征的时间尺度, 称为快时间尺度; 另一个是以等离子体宏观运动为特征的时间尺度, 称为慢时间尺度. 将电子分布函数拆分为快时间尺度和慢时间尺度部分, 即  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_{1f} + \mathbf{f}_{1s}$ , 相应地方程 (7) 拆分为两个方程:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{1f}}{\partial t} + \frac{1}{v^3} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{f}_{1f} = \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_f \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{1s}}{\partial t} + \frac{1}{v^3} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{f}_{1s} = -v \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_s \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}, \quad (11)$$

其中  $\mathbf{E}_f$  为电场的快时间尺度部分, 也就是激光的电场;  $\mathbf{E}_s$  为电场的慢时间尺度部分, 为等离子体的自生电场. 对于慢时间尺度分布函数,  $\frac{\partial \mathbf{f}_{1s}}{\partial t} \approx 0$ , 分布函数方程近似为

$$\frac{1}{v^3} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{f}_{1s} = -v \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_s \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (12)$$

下文将利用此方程讨论电子热传导系数和电阻率.

首先讨论方程(10). 对空间与时间均进行傅里叶变换, 有  $(\mathbf{k}, \varpi)$  表象中的电子分布函数  $\mathbf{f}_{\text{lf}}(\mathbf{k}, \varpi)$ :

$$-\mathrm{i} \left( \varpi + \frac{\mathrm{i}}{v^3} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \right) \mathbf{f}_{\text{lf}}(\mathbf{k}, \varpi) = \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{k}, \varpi) \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad \mathbf{f}_{\text{lf}}(\mathbf{k}, \varpi) = \frac{\mathrm{i} e}{m_e} \frac{\mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{k}, \varpi) \frac{\partial f_0}{\partial v}}{\left( \varpi + \frac{\mathrm{i}}{v^3} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \right)}. \quad (13)$$

以及快时间尺度的电流密度:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\text{f}}(\mathbf{k}, \varpi) &= -\frac{4\pi e}{3} \int_0^{\infty} v^3 \mathbf{f}_{\text{lf}}(\mathbf{k}, \varpi) dv = -\frac{\mathrm{i} 4\pi e^2}{3m_e} \int_0^{\infty} \frac{v^3 \mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{k}, \varpi) \frac{\partial f_0}{\partial v}}{\left( \varpi + \frac{\mathrm{i}}{v^3} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \right)} dv \\ &= -\frac{\mathrm{i} 4\pi e^2}{3m_e} \int_0^{\infty} \frac{v^3}{\varpi} \mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{k}, \varpi) \frac{\partial f_0}{\partial v} \left( 1 - \frac{\mathrm{i}}{\varpi v^3} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \right) dv = -\frac{\mathrm{i} 4\pi e^2}{3m_e} \int_0^{\infty} \frac{v^3}{\varpi} \mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{k}, \varpi) \frac{\partial f_0}{\partial v} dv \\ &\quad - \frac{4\pi e^2}{3m_e} \int_0^{\infty} \frac{1}{\varpi^2} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{k}, \varpi) \frac{\partial f_0}{\partial v} dv = (\sigma_R + \mathrm{i}\sigma_I) \mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{k}, \varpi). \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $\sigma_R$  为电导率系数的实部,  $\sigma_I$  为电导率系数的虚部,

$$\sigma_R = -\frac{4\pi e^2}{3m_e} \frac{1}{\varpi^2} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv, \quad \sigma_I = -\frac{4\pi e^2}{3m_e} \int_0^{\infty} \frac{v^3}{\varpi} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv. \quad (15)$$

近似取方程(15)中的频率  $\varpi$  为激光频率  $\varpi_L$ , 并取电子分布函数的各向同性部分为 Maxwell 分布, 则有电导率系数的实部:

$$\begin{aligned} \sigma_R &= -\frac{4\pi e^2}{3m_e} \frac{1}{\varpi_L^2} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv = \frac{4\pi e^2}{3m_e} \frac{1}{\varpi_L^2} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} f_0(v=0) = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e \varpi_L^2} \frac{\sum_{\alpha} \xi_{\alpha}}{3(\pi)^{3/2} v_{te}^3} \\ &= \frac{4\pi n_e e^2}{m_e \varpi_L^2} \frac{1}{3(\pi)^{3/2} v_{te}^3} \sum_{\alpha} \frac{4\pi Z_{\alpha}^2 e^4 n_{\alpha} \ln \Lambda}{m_e^2} = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e \varpi_L^2} \frac{4\pi e^4}{m_e^2} \frac{1}{3(\pi)^{3/2} v_{te}^3} \sum_{\alpha} Z_{\alpha}^2 n_{\alpha} \ln \Lambda \\ &= \frac{\varpi_{pe}^6}{\varpi_L^2} \frac{1}{12(\pi)^{5/2} v_{te}^3} \frac{\sum_{\alpha} Z_{\alpha}^2 n_{\alpha} \ln \Lambda}{n_e^2} \end{aligned} \quad (16)$$

和电导率系数的虚部:

$$\begin{aligned} \sigma_I &= -\frac{4\pi e^2}{3m_e} \int_0^{\infty} \frac{v^3}{\varpi_L} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv = \frac{4\pi e^2}{m_e \varpi_L} \int_0^{\infty} f_0 v^2 dv = \frac{4\pi e^2}{m_e \varpi_L} \frac{n_e}{(\pi)^{3/2} v_{te}^3} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{v_{te}^2}\right) v^2 dv \\ &= \frac{2\pi e^2}{m_e \varpi_L} \frac{n_e}{(\pi)^{3/2} v_{te}} \frac{1}{2} \sqrt{\pi v_{te}^2} = \frac{n_e e^2}{m_e \varpi_L} = \frac{\varpi_{pe}^2}{4\pi \varpi_L}. \end{aligned} \quad (17)$$

方程(16)和(17)中  $\varpi_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}}$  为电子等离子体频率. 对于单离子组元等离子体  $\frac{1}{n_e^2} \sum_{\alpha} Z_{\alpha}^2 n_{\alpha} \ln \Lambda = \frac{Z \ln \Lambda}{n_e}$ , 电导率系数的实部  $\sigma_R = \frac{\varpi_{pe}^6}{\varpi_L^2} \frac{Z \ln \Lambda}{12(\pi)^{5/2} n_e v_{te}^3}$ .

将电流密度由  $(\mathbf{k}, \varpi)$  表象变换至  $(\mathbf{x}, t)$  表象, 得到电流密度:

$$\mathbf{j}_{\text{f}}(\mathbf{x}, t) = (\sigma_R + \mathrm{i}\sigma_I) \mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{x}, t), \quad (18)$$

即得到了等离子体对激光场的响应, 代入 Maxwell 方程组, 就可以讨论等离子体对激光场的影响:

$$\nabla \times \mathbf{E}_{\text{f}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{f}}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B}_{\text{f}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{f}}}{\partial t} + \frac{4\pi(\sigma_R + \mathrm{i}\sigma_I)}{c} \mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{x}, t). \quad (19)$$

激光的电场可以表示为  $\mathbf{E}_{\text{f}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) e^{-\mathrm{i}\varpi_L t}$ , 激光的磁场可以表示为  $\mathbf{B}_{\text{f}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) e^{-\mathrm{i}\varpi_L t}$ , 于是有  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  和  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  满足的方程:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{i\omega_L}{c} \mathbf{B}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= -\frac{i\omega_L}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi(\sigma_R + i\sigma_I)}{c} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \\ &= -\frac{i\omega_L}{c} \left[ 1 + \frac{i4\pi(\sigma_R + i\sigma_I)}{\omega_L} \right] \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \\ &= -\frac{i\omega_L}{c} \left[ 1 - \frac{4\pi\sigma_I}{\omega_L} + i\frac{4\pi\sigma_R}{\omega_L} \right] \mathbf{E}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (21)$$

联立方程 (20) 和 (21), 有激光电场方程:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{\omega_L^2}{c^2} \left[ 1 - \frac{4\pi\sigma_I}{\omega_L} + i\frac{4\pi\sigma_R}{\omega_L} \right] \mathbf{E}_f(\mathbf{x}, t), \quad (22)$$

和激光在等离子体中传播时的色散关系:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\omega_L^2}{c^2} \left[ 1 - \frac{4\pi\sigma_I}{\omega_L} + i\frac{4\pi\sigma_R}{\omega_L} \right], \\ \omega_L^2 &= k^2 c^2 + 4\pi\omega_L\sigma_I - i4\pi\omega_L\sigma_R \\ &= k^2 c^2 + \omega_{pe}^2 - i4\pi\omega_L\sigma_R, \end{aligned} \quad (23)$$

与通常的激光色散关系相比, 多了  $-i4\pi\omega_L\sigma_R$  项, 源自于电子与离子的碰撞相互作用.

令  $k = k_R + ik_I$ , 代入方程 (23), 有

$$\begin{aligned} \omega_L^2 &= (k_R^2 - k_I^2) c^2 + \omega_{pe}^2, \\ 2k_R k_I c^2 &= 4\pi\omega_L\sigma_R. \end{aligned} \quad (24)$$

由方程 (24), 求得波数的实部和虚部:

$$\begin{aligned} k_R &= \sqrt{\frac{\omega_L^2 - \omega_{pe}^2}{c^2} + k_I^2}, \\ k_I &= \frac{2\pi\omega_L\sigma_R}{k_R c^2} = \frac{2\pi\omega_L\sigma_R}{c \sqrt{\omega_L^2 - \omega_{pe}^2 + k_I^2 c^2}}. \end{aligned} \quad (25)$$

当等离子体密度较低时,  $\omega_L \gg \omega_{pe}$ ,  $\omega_L^2 - \omega_{pe}^2 \gg k_I^2 c^2$ , 可得

$$k_I \approx \frac{2\pi\omega_L\sigma_R}{c \sqrt{\omega_L^2 - \omega_{pe}^2}}. \quad (26)$$

假定激光的传播方向为  $z$  方向, 所有物理量仅随  $z$  变化, 也就是  $E_f(z, t) = E(z, t) e^{i(k_R + ik_I)z}$ , 于是有激光强度  $I \propto E_f E_f^* \propto e^{-2k_I z}$ , 则单位长度激光强度的衰减:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dz} &= -2k_I I = -\frac{4\pi\omega_L\sigma_R}{c \sqrt{\omega_L^2 - \omega_{pe}^2}} I \\ &= -\frac{64\pi^3 e^6 n_e}{3c\omega_L^2} \frac{\sum_\alpha Z_\alpha^2 n_\alpha \ln A}{(2\pi m_e k_B T_e)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_L^2}}} I. \end{aligned} \quad (27)$$

这就是通常文献中的激光能量沉积方程, 激光能量沉积系数:

$$\begin{aligned} K_{L1} &= \frac{4\pi\omega_L\sigma_R}{c \sqrt{\omega_L^2 - \omega_{pe}^2}} \\ &= \frac{64\pi^3 e^6 n_e}{3c\omega_L^2} \frac{\sum_\alpha Z_\alpha^2 n_\alpha \ln A}{(2\pi m_e k_B T_e)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_L^2}}} \\ &= 2.75 \times 10^{-42} \frac{(\lambda/\mu\text{m})^2}{T_e^{3/2}} \frac{n_e \sum_\alpha Z_\alpha^2 n_\alpha \ln A}{\sqrt{1 - n_e/n_c}} \text{ cm}^{-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

方程 (28) 中电子温度的单位为 keV, 电子和离子密度的单位为  $\text{cm}^{-3}$ ;  $\lambda$  为激光波长, 单位为  $\mu\text{m}$ ;  $n_c$  为临界密度,  $n_c = 1.1 \times 10^{21} (\mu\text{m}/\lambda)^2$ . 对于单离子组元等离子体  $\sum_\alpha Z_\alpha^2 n_\alpha = Z n_e$ ,  $K_{L1} = 2.75 \times 10^{-42} \times \frac{(\lambda/\mu\text{m})^2}{T_e^{3/2}} \frac{Z n_e^2 \ln A}{\sqrt{1 - n_e/n_c}} \text{ cm}^{-1}$ .

需要指出一点, 这个激光能量沉积系数在临界面处发散, 在文献 [6] 中, 作者指出存在这个问题的原因. 事实上, 在临界面处激光的频率等于电子等离子体波的频率  $\omega_L = \omega_{pe}$ , 所以在临界面处近似  $\omega_L^2 - \omega_{pe}^2 + k_I^2 c^2 \approx \omega_L^2 - \omega_{pe}^2$  不成立. 由方程 (25) 可得

$$(k_I c)^2 (\omega_L^2 - \omega_{pe}^2 + k_I^2 c^2) - (2\pi\omega_L\sigma_R)^2 = 0. \quad (29)$$

此方程的根为

$$\begin{aligned} (k_I c)^2 &= \frac{-(\omega_L^2 - \omega_{pe}^2) + \sqrt{(\omega_L^2 - \omega_{pe}^2)^2 + 4(2\pi\omega_L\sigma_R)^2}}{2}, \\ k_I &= \frac{1}{\sqrt{2}c} \sqrt{\sqrt{(\omega_L^2 - \omega_{pe}^2)^2 + 4(2\pi\omega_L\sigma_R)^2} - (\omega_L^2 - \omega_{pe}^2)}. \end{aligned} \quad (30)$$

于是有不含奇点的激光能量沉积方程:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dz} &= -2k_I I = -\frac{\sqrt{2}}{c} \\ &\times \sqrt{\sqrt{(\omega_L^2 - \omega_{pe}^2)^2 + 4(2\pi\omega_L\sigma_R)^2} - (\omega_L^2 - \omega_{pe}^2)} I, \end{aligned} \quad (31)$$

和激光能量沉积系数:

$$\begin{aligned} K_{L2} &= \sqrt{2}/c \\ &\times \sqrt{\sqrt{(\omega_L^2 - \omega_{pe}^2)^2 + 4(2\pi\omega_L\sigma_R)^2} - (\omega_L^2 - \omega_{pe}^2)}. \end{aligned} \quad (32)$$

在临界面处  $\omega_L = \omega_{pe}$ ,  $K_{L2} = 2\sqrt{2\pi\omega_L\sigma_R}/c$ ; 在低等离子体密度区域,  $\omega_L \gg \omega_{pe}$  并且  $(\omega_L^2 - \omega_{pe}^2)^2 \gg$

$$4 \times (2\pi\varpi_L\sigma_R)^2, K_{L2} = \frac{4\pi\varpi_L\sigma_R}{c\sqrt{\varpi_L^2 - \varpi_{pe}^2}} = K_{L1}.$$

## 4 电子热传导系数

考虑一维情况, 由方程(12), 可得慢时间尺度分布函数的各向异性部分:

$$f_{1s} = -\frac{v^4}{\sum_\alpha \xi_\alpha} \left( \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{eE_s}{m_e v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right). \quad (33)$$

同样假定电子的零级分布函数  $f_0$  为 Maxwell 分

布, 有

$$\begin{aligned} f_{1s} &= -\frac{v^4}{\sum_\alpha \xi_\alpha} \left( \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{eE_s}{m_e v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) \\ &= -\frac{v^3}{\sum_\alpha \xi_\alpha} \left( \frac{v}{L_T} - \frac{3v}{2L_T} + \frac{v^3}{v_{te}^2 L_T} + \frac{eE_s v}{k_B T_e} \right) f_0. \end{aligned} \quad (34)$$

其中  $L_T = T_e(\partial T_e / \partial x)^{-1}$  为电子温度的空间标长,  $L_n = n_e(\partial n_e / \partial x)^{-1}$  为电子密度的空间标长.

将方程(34)代入电流密度方程(9), 有

$$\begin{aligned} j_s &= \frac{4\pi e}{3 \sum_\alpha \xi_\alpha} \int_0^\infty v^6 \left( \frac{v}{L_n} - \frac{3v}{2L_T} + \frac{v^3}{v_{te}^2 L_T} + \frac{eE_s v}{k_B T_e} \right) f_0 dv \\ &= \frac{4\pi e}{3 \sum_\alpha \xi_\alpha} \frac{n_e v_{te}^5}{(\pi)^{3/2}} \left[ \left( \frac{1}{L_n} - \frac{3}{2L_T} + \frac{eE_s}{k_B T_e} \right) \int_0^\infty y^7 e^{-y^2} dy + \frac{1}{L_T} \int_0^\infty y^9 e^{-y^2} dy \right] \\ &= \frac{4\pi e}{\sum_\alpha \xi_\alpha} \frac{n_e v_{te}^5}{(\pi)^{3/2}} \left( \frac{1}{L_n} + \frac{5}{2L_T} + \frac{eE_s}{k_B T_e} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

假定系统中空间各处的电流密度  $j_s$  始终为零, 于是有等离子体中的慢时间尺度的电场:

$$\begin{aligned} \frac{eE_s}{k_B T_e} &= -\frac{1}{L_n} - \frac{5}{2L_T}, \\ \frac{eE_s}{k_B T_e} &= -\frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} - \frac{5}{2T_e} \frac{\partial T_e}{\partial x}. \end{aligned} \quad (36)$$

方程(36)表明, 电场力方向与密度梯度、温度梯度方向相反. 物理上这是容易理解的. 当密度梯度为正, 即右边区域的密度高于左边区域; 温度梯度为正时, 右边区域的温度高于左边区域; 电子从高密度区域向低密度区域扩散, 从高温度区域向低温度区域热扩散, 导致左边区域的电子数密度高于右边区域, 形成向左的电场驱动电子向右运动, 与密度扩散、温度扩散相抵消.

有了电场, 求得慢时间尺度分布函数的各向异性部分为

$$f_{1s} = \frac{v^4}{\sum_\alpha \xi_\alpha L_T} \left( 4 - \frac{v^2}{v_{te}^2} \right) f_0. \quad (37)$$

根据定义, 电子热流为

$$\begin{aligned} Q &= \int \frac{1}{2} m_e v^2 \mathbf{v} f_e d\mathbf{v} \\ &= \int \frac{1}{2} m_e v^4 \mathbf{v} \left( f_0 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{1s}}{v} \right) dv d\Omega \\ &= \frac{4\pi}{3} \int \frac{1}{2} m_e v^5 \mathbf{f}_{1s} dv. \end{aligned} \quad (38)$$

一维情况下:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2\pi m_e}{3} \int_0^\infty f_{1s} v^5 dv = -\frac{2m_e}{3 \sum_\alpha \xi_\alpha L_T} \frac{n_e v_{te}^7}{\sqrt{\pi}} \\ &\quad \times \int_0^\infty y^9 e^{-y^2} dy = -\frac{8m_e}{\sqrt{\pi}} \frac{n_e v_{te}^7}{\sum_\alpha \xi_\alpha L_T}. \end{aligned} \quad (39)$$

代入  $\xi_\alpha = \frac{4\pi Z_\alpha^2 e^4 n_\alpha \ln \Lambda}{m_e^2}$ ,  $L_T = T_e(\partial T_e / \partial x)^{-1}$ ,  $v_{te}^2 = 2k_B T_e / m_e$ , 得

$$\sum_\alpha \xi_\alpha = \sum_\alpha \frac{4\pi Z_\alpha^2 e^4 n_\alpha \ln \Lambda}{m_e^2} = \frac{4\pi e^4}{m_e^2} \sum_\alpha Z_\alpha^2 n_\alpha \ln \Lambda, \quad (40)$$

和电子热流

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{8m_e}{\sqrt{\pi}} \frac{n_e v_{te}^7}{\sum_i \xi_i L_T} \\ &= -\frac{2m_e^3 n_e}{\pi \sqrt{\pi} e^4} \left( \frac{2k_B T_e}{m_e} \right)^{7/2} \frac{1}{\sum_\alpha Z_\alpha^2 n_\alpha \ln \Lambda} \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial x} \\ &= -K_T \frac{\partial T_e}{\partial x}, \end{aligned} \quad (41)$$

其中电子热传导系数

$$K_T = \frac{16\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\pi}} \frac{k_B^{7/2}}{e^4 \sqrt{m_e}} \frac{n_e}{\sum_\alpha Z_\alpha^2 n_\alpha \ln \Lambda} T_e^{5/2}, \quad (42)$$

代入相关物理参数的具体数值, 有电子热流:

$$Q = -K_T \frac{\partial T_e}{\partial x} \text{ J}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s}),$$

$$K_T = 4.16 \times 10^{13} \frac{n_e}{\sum_{\alpha} Z_{\alpha}^2 n_{\alpha} \ln A} T_e^{5/2}, \quad (43)$$

其中电子温度的单位为 keV, 电子和离子密度的单位为  $\text{cm}^{-3}$ . 对于单离子组元等离子体

$$\frac{n_e}{\sum_{\alpha} Z_{\alpha}^2 n_{\alpha}} = \frac{1}{Z}, \quad K_T = 4.16 \times 10^{13} \frac{1}{Z \ln A} T_e^{5/2}.$$

## 5 电阻率

回到方程 (35), 电流密度

$$\begin{aligned} j_s &= \frac{4\pi e}{\sum_{\alpha} \xi_{\alpha} (\pi)^{3/2}} \frac{n_e v_{te}^5}{k_B T_e} \left( \frac{1}{L_n} + \frac{5}{2L_T} + \frac{eE_s}{k_B T_e} \right) \\ &= \frac{4\pi e}{\sum_{\alpha} \xi_{\alpha} (\pi)^{3/2}} \frac{n_e v_{te}^5}{n_e} \left( \frac{1}{\partial x} \frac{\partial n_e}{\partial x} + \frac{5}{2T_e} \frac{\partial T_e}{\partial x} + \frac{eE_s}{k_B T_e} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

上述方程表明电流源自密度的不均匀、温度的不均匀与系统内的电场. 对于空间均匀系统, 电流密度

$$j_s = \frac{4\pi e^2}{\sum_{\alpha} \xi_{\alpha} (\pi)^{3/2} k_B T_e} \frac{n_e v_{te}^5}{k_B T_e} E_s \equiv \frac{E_s}{\eta}. \quad (45)$$

其中电阻率为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\sum_{\alpha} \xi_{\alpha} (\pi)^{3/2} k_B T_e}{4\pi e^2} \frac{n_e v_{te}^5}{n_e v_{te}^5} \\ &= \frac{\pi^{3/2}}{2^{5/2}} \frac{e^2 \sqrt{m_e}}{k_B^{3/2}} \frac{1}{T_e^{3/2}} \frac{\sum_{\alpha} Z_{\alpha}^2 n_{\alpha}}{n_e} \ln A, \end{aligned} \quad (46)$$

代入相关物理参数的具体数值, 有电阻率

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\pi^{3/2}}{2^{5/2}} \frac{e^2 \sqrt{m_e}}{k_B^{3/2}} \frac{1}{T_e^{3/2}} \frac{\sum_{\alpha} Z_{\alpha}^2 n_{\alpha}}{n_e} \ln A \\ &= 1.07 \times 10^{-19} \frac{1}{T_e^{3/2}} \frac{\sum_{\alpha} Z_{\alpha}^2 n_{\alpha}}{n_e} \ln A \text{ sec}. \end{aligned} \quad (47)$$

其中电子温度的单位为 keV, 电子和离子密度的单位为  $\text{cm}^{-3}$ .

根据单位换算  $1 \text{ sec} = 9 \times 10^9 \Omega \cdot \text{m}$ , 有电阻率:

$$\begin{aligned} \eta &= 1.07 \times 10^{-19} \frac{1}{T_e^{3/2}} \frac{1}{n_e} \sum_{\alpha} Z_{\alpha}^2 n_{\alpha} \ln A \text{ sec} \\ &= 9.63 \times 10^{-10} \frac{1}{T_e^{3/2}} \frac{1}{n_e} \sum_{\alpha} Z_{\alpha}^2 n_{\alpha} \ln A \Omega \cdot \text{m} \\ &= 9.63 \times 10^{-8} \frac{1}{T_e^{3/2}} \frac{1}{n_e} \sum_{\alpha} Z_{\alpha}^2 n_{\alpha} \ln A \Omega \cdot \text{cm}. \end{aligned} \quad (48)$$

对于完全电离的单离子组元的等离子体,

$$\frac{\sum_{\alpha} Z_{\alpha}^2 n_{\alpha}}{n_e} = Z, \text{ 则有电阻率}$$

$$\eta = 1.07 \times 10^{-19} \frac{Z \ln A}{T_e^{3/2}} \text{ sec} = 9.63 \times 10^{-8} \frac{Z \ln A}{T_e^{3/2}} \Omega \cdot \text{cm},$$

取氢等离子体, 电子温度 1 keV 时, 电阻率  $\eta = 9.63 \times 10^{-8} \ln A \Omega \cdot \text{cm} \approx 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$ ; 电子温度 0.1 keV 时, 电阻率  $\eta = 3.05 \times 10^{-6} \ln A \Omega \cdot \text{cm} \approx 3.05 \times 10^{-5} \Omega \cdot \text{cm}$ .

如果电子温度的单位为 deg(K), 则电阻率:

$$\begin{aligned} \eta &= 4.2 \times 10^{-9} \frac{1}{T_e^{3/2}} \frac{1}{n_e} \sum_{\alpha} Z_{\alpha}^2 n_{\alpha} \ln A \text{ sec} \\ &= 3.80 \times 10^1 \frac{1}{T_e^{3/2}} \frac{1}{n_e} \sum_{\alpha} Z_{\alpha}^2 n_{\alpha} \ln A \Omega \cdot \text{m} \\ &= 3.80 \times 10^3 \frac{1}{T_e^{3/2}} \frac{1}{n_e} \sum_{\alpha} Z_{\alpha}^2 n_{\alpha} \ln A \Omega \cdot \text{cm}. \end{aligned} \quad (49)$$

对于完全电离的单离子组元的等离子体, 电阻率:

$$\eta = 3.80 \times 10^3 \frac{Z \ln A}{T_e^{3/2}} \Omega \cdot \text{cm}. \quad (50)$$

这正是文献 [18] 中的 (5)—(35) 式.

## 6 小 结

基于动理学方程, 采用快慢时标方法, 给出了等离子体中激光能量沉积系数、电子热传导系数和电阻率的统一推导.

## 参考文献

- [1] Dawson J M, Oberman C 1962 *Phys. Fluids* **5** 517
- [2] Dawson J M 1964 *Phys. Fluids* **7** 981
- [3] Chang T Q, Zhang J, Zhang J T, Lin D W, Lai D X, Shen L J, Xu L B, Chen G N 1991 *Laser Plasma Interaction and Laser Fusion* (Changsha: Hunan Science and Technology Press) pp23–30 (in Chinese) [常铁强, 张钧, 张家泰, 林德文, 赖东显, 沈隆钧, 许林宝, 陈光南 1991 激光等离子体相互作用与激光聚变 (长沙: 湖南科学技术出版社) 第 23—30 页]
- [4] Drake R P 2006 *High Energy Density Physics* (New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag) pp341–361
- [5] Atzeni S, Meyer-ter-Vhen J 2003 *Inertial Fusion* (Oxford: Clarendon Press) pp396–400
- [6] Zhu S P, Gu P J 1999 *High Power Laser Part. Beams* **11** 687 (in Chinese) [朱少平, 古培俊 1999 强激光与粒子束 **11** 687]
- [7] Cohen R S, Spitzer Jr L, Routly P M 1950 *Phys. Rev.* **80** 230
- [8] Spitzer Jr L, Harm R 1953 *Phys. Rev.* **89** 977
- [9] Malone R C, McCrory R L, Morse R L 1975 *Phys. Rev. Lett.* **34** 721
- [10] Bell A R, Evans R G, Nicholas D J 1981 *Phys. Rev. Lett.* **46** 243
- [11] Matte J P, Virmont J 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 1936
- [12] Luciani J F, Mora P, Virmont J 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 1664

- [13] Albritton J R 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 1887  
 [14] Zhu S P, Gu P J 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 520  
 [15] Huo W Y, Lan K, Gu P J, Yong H, Zeng Q H 2012 *Phys. Plasmas* **19** 012303  
 [16] Zhang E H, Cai H B, Du B, Tian J M, Zhang W S, Kong D G, Zhu S P 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 035204 (in Chinese) [张恩浩, 蔡洪波, 杜报, 田建民, 张文帅, 康洞国, 朱少平 2020 物理学报 **69** 035204]  
 [17] Shkarofsky P, Johnston T W, Bachynski M P 1966 *The Particle Kinetics of Plasmas* (Addison-Wesley Publishing Company, Inc.) pp243–307  
 [18] Spitzer Jr L 1958 *Physics of Fully Ionized Gases* (New York: Interscience Publishers) pp65–88

# Unified derivation of laser energy deposition coefficient, electron thermal conduction coefficient and resistivity in plasma<sup>\*</sup>

ZHU Shaoping<sup>†</sup>

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China)

(Received 15 March 2025; revised manuscript received 12 April 2025)

## Abstract

The laser energy deposition coefficient, the electron thermal conduction coefficient, and the resistivity are three important physical quantities in plasma physics. For a multi-ion-component plasma, considering only the collisional interaction between electrons and ions, starting from the kinetic equation in the Fokker-Planck approximation, and using multi-timescale method, a unified derivation of the laser energy deposition coefficient, electron thermal conduction coefficient, and resistivity in the plasma is presented.

**Keywords:** laser energy deposition coefficient, electron thermal conduction coefficient, resistivity, unified derivation

**PACS:** 52.25.Dg, 52.25.Fi, 52.25.Os, 52.38.Dx

**DOI:** [10.7498/aps.74.20250340](https://doi.org/10.7498/aps.74.20250340)

**CSTR:** [32037.14.aps.74.20250340](https://cstr.aps.org/cstr/32037.14.aps.74.20250340)

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12247201).

† E-mail: [zhu\\_shaoping@iapcm.ac.cn](mailto:zhu_shaoping@iapcm.ac.cn)



## 等离子体中激光能量沉积系数、电子热传导系数和电阻率的统一推导

朱少平

**Unified derivation of laser energy deposition coefficient, electron thermal conduction coefficient and resistivity in plasma**

ZHU Shaoping

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 74, 125201 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250340

CSTR: 32037.14.aps.74.20250340

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250340>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

电子散射和能量分配方式对电子输运系数的影响

Influence of electron scattering and energy partition method on electron transport coefficient

物理学报. 2021, 70(13): 135101 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202021>

高能离子在稠密等离子体中的能量沉积和电子离子能量分配

Energy deposition and electron-ion energy partition of high-energy ions in dense plasmas

物理学报. 2025, 74(9): 093401 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20241763>

热传导对横截面不同的直管道中Kelvin–Helmholtz不稳定性的影响

Effect of thermal conduction on Kelvin–Helmholtz instability in straight pipe with different cross-sections

物理学报. 2022, 71(9): 094701 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211155>

等离子体层嘶声波对辐射带电子投掷角散射系数的多维建模

Multi-dimensional modeling of radiation belt electron pitch-angle diffusion coefficients caused by plasmaspheric hiss

物理学报. 2022, 71(22): 229401 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220655>

Peltier系数的稳态法和瞬态法测量

Peltier coefficient measured by steady-state method and transient-state method

物理学报. 2023, 72(6): 068401 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222255>

动态响应和屏蔽效应对稠密等离子体中电子离子能量弛豫的影响

Analysis of dynamic response and screening effects on electron–ion energy relaxation in dense plasma

物理学报. 2025, 74(3): 035101 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20241588>