

湍流积分尺度修正及其对湍流耗散规律的影响*

王宇杰¹⁾ 杨君圣¹⁾ 王杰²⁾ 周彦宏¹⁾ 刘锋^{1)3)†}

1) (中北大学能源与动力工程学院, 太原 030051)

2) (中国航空发动机研究院, 系统工程研究中心, 北京 101304)

3) (南京理工大学能源与动力工程学院, 南京 210094)

(2025 年 5 月 6 日收到; 2025 年 6 月 19 日收到修改稿)

湍流直接数值模拟受限于计算域尺寸, 无法完全解析湍动能谱低波数区的所有波数, 造成计算数据中部分大尺度信息丢失. 随着湍流的演化, 湍动能谱的峰值波数会向低波数迁移, 使得低波数缺失现象进一步加剧, 导致所计算的积分尺度和湍流耗散相关统计量偏离物理真实. 本研究基于 von Kármán 谱模型的推广形式, 充分考虑数值计算未完全解析的低波数区湍动能谱, 并利用该模型对均匀各向同性自由衰减湍流的积分尺度和湍流耗散相关统计量进行修正. 研究表明: 修正后的积分尺度 L 显著高于未修正值, 且其随时间的变化规律符合 Saffmann 理论预测的 $L \propto t^{2/5}$ 幂律关系; 修正前湍流耗散系数 C_ϵ 为常数, 说明此时湍流为均衡状态, 而修正后耗散系数 C_ϵ 的演化满足湍流非均衡耗散规律 $C_\epsilon \sim Re_\lambda^{-1}$. 将数值计算缺失的低波数区湍动能谱引入后, 湍流状态由均衡向非均衡转变, 说明大尺度对湍流耗散有很强的调控作用, 这与学术界普遍认为的大尺度结构是造成湍流非均衡性本质原因的结论相一致. 在有限雷诺数或者受初始条件影响较大的湍流流动中, 大尺度结构对流动的影响显著, 湍流无法在全尺度实现均衡.

关键词: 各向同性湍流, 积分尺度, 低波数缺失, von Kármán 谱模型**PACS:** 47.27.-i, 47.27.Gs**DOI:** 10.7498/aps.74.20250594**CSTR:** 32037.14.aps.74.20250594

1 引言

在工程湍流模型中, 湍流积分尺度作为表征湍流大涡运动的特征长度^[1], 是构建湍流模型和优化工业设备的关键参数. 例如积分尺度决定了温度脉动的初始能量分布尺度, 当通过改变加热方式调整初始温度脉动的积分尺度时, 其温度脉动衰减率会随之变化, 显著影响燃烧稳定性^[2]; 在风力机尾流演化模拟中, 积分尺度的低估会错误预测湍流动能的横向扩散速率, 进而影响风电场布局优化^[3]. 此外, 积分尺度也决定着风荷载的脉动特性谱, 是工程抗风设计的关键依据^[4-6].

湍流积分尺度的演化规律不仅深刻反映了能量从大尺度向小尺度的传递过程, 更是构建湍流封闭模型的基础. 尽管其工程应用的重要性已得到广泛认可, 但积分尺度的演化规律仍存在分歧. 自 Taylor^[7] 首次提出积分尺度的统计定义以来, 其时间依赖性一直是湍流研究中的争议焦点. 早期理论研究中, Kolmogorov 和 Lumley^[8] 基于能量级串的局部均衡假设, 推导出积分尺度随时间的幂律增长关系 $L \propto t^{2/7}$, 而 Dryden^[9] 通过相似性分析提出 $L \propto t^{1/2}$, Saffmann^[10] 又通过引入 Birkhoff 不变量, 在低波数湍动能谱的幂律指数 $\sigma = 2$ 的条件下推导出 $L \propto t^{2/5}$, 这几种理论预测的显著分歧, 本质上源于湍动能谱幂律指数的具体值存在争议, 而

* 国家自然科学基金 (批准号: 12002318)、中国博士后基金 (批准号: 2022M721630) 和山西省基础研究计划 (批准号: 202303021221118) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: feng.liu@nuc.edu.cn

该指数与空间衰减或能谱的低波数依赖性密切相关^[11]. 实验研究虽试图验证这些理论, 但受限于风洞尺寸与测量技术, 难以完全捕捉能谱低波数区的数据, 从而导致积分尺度测量产生偏差^[12,13], 这一矛盾在 DNS 直接数值模拟兴起后更为凸显. 因此, 尽管 DNS 能够精确解析高波数区的耗散过程^[14], 但周期性边界条件限制了湍动能谱中的最小可解析波数 k_L ^[15,16], 使得大尺度涡结构的演化无法完整捕捉.

在湍流衰减动力学研究中, 耗散系数 C_ε 作为表征能量耗散与湍动能输运均衡状态的关键参数, 其非定常特性直接影响着湍流封闭模型的构建. 而从耗散系数 C_ε 定义式 $C_\varepsilon = \varepsilon L / u^3$ (ε 为湍动能耗散率, u 为均方根速度) 可以看出, 积分尺度的准确测量会直接影响耗散标度. 经典 Kolmogorov 理论基于局部均衡假设推导出 C_ε 的常数特性, 但该结论在有限雷诺数低波数衰减湍流中面临挑战^[18]. 实验与 DNS 研究表明^[19], 初始条件下大尺度运动的非均衡演化将导致 $C_\varepsilon \sim Re_\lambda^{-1}$ 的耗散标度律, 这区别于经典的 Kolmogorov 耗散规律. 然而, 由于能谱低波数缺失的影响, 数值模拟中 C_ε 往往无法真实反映湍流系统在尺度相互作用中的非均衡特性, 这种能谱低波数的缺失掩盖了大尺度脉动对能量级串的调节作用.

不同于 Kolmogorov 理论的局部相似性假设^[8], George^[20] 通过全局自相似性理论框架重新审视了衰减湍流的全局动力学, 认为湍动能谱 $E(k, t)$ 和湍流传输谱 $T(k, t)$ 均可以泰勒尺度 λ 为唯一长度尺度进行标度化, 指出积分尺度 L 与泰勒尺度 λ 的比值 L/λ 应保持恒定, 这一结论似乎与经典的 Kolmogorov 理论 $L/\lambda \propto Re_\lambda^1$ ^[8,21] 的形成鲜明对比. DNS 实测数据^[22] 揭示, 在衰减湍流演化过程中, 湍动能谱峰值对应的波数 k_p 会随时间向低波数迁移, 为了更多地捕捉到低波数信息, de Bruyn Kops 和 Riley^[23] 提出 k_L/k_p 应小于 0.3, 但现有修正模型多局限于均衡湍流假设, 难以刻画湍动能谱低波数区的大尺度运动.

针对上述问题, 本研究基于广义 von Kármán 谱模型^[24] 的修正框架, 将湍动能谱的大尺度结构考虑在内, 实现对积分尺度计算误差的量化评估. 通过对各项均匀同性湍流的 DNS 数据验证, 证实修正后的积分尺度演化遵循 Saffman 理论预测的时间幂律关系 $L \propto t^{2/5}$, 同时揭示了湍流系统在引

入大尺度结构后的非均衡特征.

2 研究方法

本文所研究的对象是自由衰减的各向均匀同性湍流, 采用 DNS 直接数值模拟的方法生成数据, 对不可压缩纳维-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程在全时空尺度上进行数值求解.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{u}$ 是无散度速度场 ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$); P 是压力; ρ 是流体密度; ν 是运动黏度. DNS 算例采用 Rogallo^[25] 提出的伪谱法求解, 并用半隐式法处理黏性项, 时间方向上采用四阶显式龙格-库塔 (Runge-Kutta) 方法进行积分. 本研究计算区域为一个边长为 4π 的周期性立方体, 计算网格数为 384^3 , 空间分辨率 $k_{\max} \eta = 1.65$ ($k_{\max}$ 为最大波数, η 为耗散尺度). 该算例从一个完全发展的自由衰减湍流场开始计算, 且该自由衰减流场是由随机初始场计算得到的^[26]. 随机场的能谱分布与 Comte-Bellot 和 Corrsin^[12] 的实验能谱一致. 模拟时间 t 的区间为 $[0.24350, 0.30325]$, 该区间内的湍流已经经历了长时间的衰减, 符合各向同性湍流的均衡特征.

3 湍动能谱低波数缺失的影响

在均匀各向同性湍流研究中, 积分尺度与能量的准确计算依赖于能谱在全部波数范围内的完整描述. 然而, 受限于实验测量或数值模拟的物理条件 (如计算域尺寸或网格分辨率), 实际可获取的能谱往往缺失部分低波数信息. 这一问题对积分尺度的测量影响尤为显著.

湍动能 E 与能谱 $E(k)$ 之间的关系为

$$E(t) = \frac{3}{2} \langle u^2 \rangle = \int_0^\infty E(k, t) dk, \quad (2)$$

其中 u 为均方根脉动速度; 尖括号表示求系综平均; k 为波数. 谱空间中湍流积分尺度求解如下:

$$L = \frac{\pi}{2 \langle u^2 \rangle} \int_0^\infty \frac{E(k, t)}{k} dk. \quad (3)$$

但在实际 DNS 模拟实验中, 我们无法得到波数低于 k_L 的波数值, 因此实际值为

$$\frac{3}{2} u_m^2 = \int_{k_L}^\infty E(k, t) dk, \quad (4)$$

$$L_m = \frac{\pi}{2 \langle u_m^2 \rangle} \int_{k_L}^{\infty} \frac{E(k, t)}{k} dk, \quad (5)$$

其中 u_m , L_m 为未修正的均方根脉动速度和积分尺度 (公式中下标 m 代表未修正值, 未标注下标的 u 和 L 为真实值), 本研究中 DNS 可取得的最小波数值 $k_L = 0.52$. 由于低波数段部分缺失, 基于波数范围 $[k_L, +\infty)$ 的积分计算将导致积分尺度实际值 L_m 显著低于真实值 L .

图 1 展示了不同时间下能谱 $E(k)$ 随波数的变化, 从图中可以看出本研究算例中最小可解析波数与能谱峰值波数之比 $k_L/k_p = 1$, 该值大于 de Bruyn Kops 和 Riley^[23] 提出的 $k_L/k_p = 0.3$, 这意味着数值模拟未能完全解析湍流大尺度结构的动态演化, 导致大涡运动信息部分丢失. 事实上, 随着能谱峰值波数 k_p 向低波数方向迁移^[22], k_L/k_p 比值呈现单调递增趋势, 使得低波数缺失现象愈发严重, 此时若仍采用缺失后的能谱计算积分尺度, 误差会随时间的推移被放大.

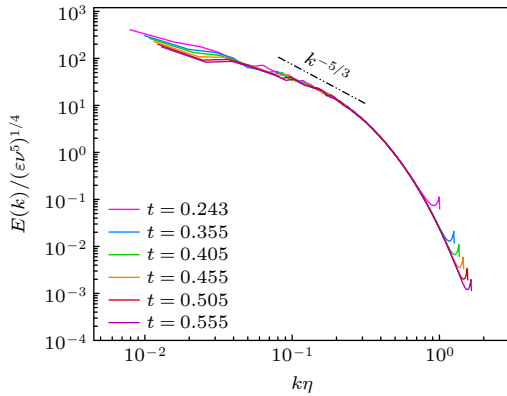


图 1 算例能谱 $E(k)$ 随波数的演化. 其中能谱 $E(k)$ 用湍动能耗散率 ε 和运动黏度 ν 无量纲化, 波数 k 用耗散尺度 η 无量纲化. 双点划线满足 $E(k) \sim k^{-5/3}$ 关系. 能谱在惯性子区满足 $k^{-5/3}$ 标度律

Fig. 1. Example of the energy spectrum $E(k)$ evolution with wavenumber. The energy spectrum $E(k)$ is non-dimensionalized by the turbulent kinetic energy dissipation rate ε and the kinematic viscosity ν , while the wavenumber k is non-dimensionalized by the dissipation scale η . The double dot-dash line corresponds to the $E(k) \sim k^{-5/3}$ relationship. The energy spectrum in the inertial subrange follows the $k^{-5/3}$ scaling law.

4 湍动能谱修正模型

本研究采用 von Kármán 谱模型^[24] 的广义形式作为理论框架, 其函数形式可表示为

$$E(x) = B \frac{x^4}{(1+x^2)^{17/6}}, \quad (6)$$

其中 B 为调整幅值的无量纲归一化系数; $x = k/k_e$, k_e 为特征波数, 用于划分谱模型中低波数到高波数的过渡. 需要指出的是, 该谱模型假设的对象是低波数区, 能谱按 k^4 增长, 而惯性子区按 $k^{-5/3}$ 衰减. 在有限雷诺数下能谱惯性子区的行为会轻微偏离经典 $k^{-5/3}$ 律^[17], 因此 Gamard 和 George^[27] 在保留 (6) 式框架的基础上, 将有限雷诺数和低波数缺失的影响考虑在内, 通过引入湍动能谱幂律指数 p , 创建了一个涵盖所有波数范围的广义模型:

$$E(k, t) = u^2 L \frac{C_p (kL)^p}{[1 + (k/k_e)^2]^{p/2+5/6}}, \quad (7)$$

其中系数 C_p 和特征波数 k_e 通过能量和积分尺度的积分约束确定^[28,29], 参数 p 根据 George^[20] 的相似关系确定. 基于此, 我们通过修正的能谱模型来补偿数值模拟中的低波数缺失效应. 具体实施时, 将积分下限为 k_L 的湍动能积分值与积分下限为 0 的理论积分值作比, 再进行简单的变量替换并转换为不完全贝塔函数:

$$\frac{u_m^2}{u^2} = I_z \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}(p+1); z \right), \quad (8)$$

其中变量 z 由以下公式定义:

$$z \equiv \frac{1}{1 + \left(\frac{3p}{5} \right) \left(\frac{k_L}{k_p} \right)^2}. \quad (9)$$

I_z 为不完全贝塔函数:

$$I_z(a, b; z) \equiv [B(a, b)]^{-1} \int_0^z t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad (10)$$

其中贝塔函数:

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (11)$$

同理我们将 (7) 式谱模型进行积分尺度积分作比, 可以得到 (12) 式:

$$\frac{L_m}{L} = \frac{I_z \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}p; z \right)}{\frac{u_m^2}{u^2}} = \frac{I_z \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}p; z \right)}{I_z \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}(p+1); z \right)}. \quad (12)$$

要对 L 进行迭代求解, 需要将变量 z 用准确的积分尺度 L 表示, 在 Wang 和 George^[28] 的附录 A 中:

$$k_p L = \frac{3\pi \left[\frac{3p}{5} \right]^2}{4} \frac{B\left(\frac{5}{6}, \frac{p}{2}\right)}{B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}(p+1)\right)}. \quad (13)$$

为了将 L 与 z 建立联系, 我们进行 $\frac{k_L}{k_p} = \frac{k_L L}{k_p L}$ 的参数转换. (13) 式可以看出, 当参数 p 确定时, $k_p L$ 为常数. (12) 式左侧的 L_m 为已知的实际值, 右侧的变量 z 依赖于 L , 因此方程可以表示为 $L_m/L = f(L)$, 要想得到修正后的 L 需要提供 u_m^2 , L_m 和最小波数 k_L 的值, 然后进行隐式迭代得到真实值.

需特别指出, 以上公式均含有的参数是指数 p , 因此正确选择 p 对修正的准确性至关重要. 图 2(a) 和图 2(b) 分别展示了参数 p 和低波数缺失程度 k_L/k_p 对修正后能量比 u_m^2/u^2 及积分尺度比 L_m/L 的影响, 横坐标 k_L/k_p 作为独立变量进行赋值.

从图 2(a) 可见, u_m^2/u^2 比对 p 值的敏感性较弱. 例如当 $k_L/k_p = 0.5$ 时, $p = 1$ 和 $p = 2$ 对应的能量损失差异不足 5%. 而图 2(b) 中积分尺度比 L_m/L 对 p 和 k_L/k_p 的综合影响显著敏感. 当 $p = 2$ 且 $k_L/k_p = 0.5$ 时, L_m/L 的偏差为 16.91%, 这是由于积分尺度计算中低波数区域 $E(k)/k$ 的权重更高 ((3) 式), 而低波数缺失直接削弱了其对积分尺度的贡献. 正如第 3 节提到的, 随着 k_L/k_p 增大, 能谱峰值会向更低波数迁移, 不同 p 值对应的 L_m/L 曲线呈现显著发散. 例如, 当 $k_L/k_p = 1.0$ 且 $p = 2$ 时, 积分尺度偏差差异可达 39.7%, 这一显著差异揭示参数 p 的选择需与动力学约束严格匹配. George^[20] 首次证明, 当所研究数据遵循 $u^2 \propto t^n$ 的幂律衰减特性时, 存在 $p = -2n - 1$ 的关系, 其中 n 为湍动能衰减指数, 该关联确保了修正过程中指数 n 与积分尺度演

化的自洽性.

在 George^[20] 的自相似性假设下, 泰勒尺度 λ 为单一长度尺度并在全波数范围内有效, 而泰勒尺度的平方在该假设下将呈线性增长^[10,20,30]:

$$\lambda^2 = -(10/n) \nu (t - t_0), \quad (14)$$

其中 t_0 为虚拟原点, 选择 t_0 的作用在于调整时间轴的起点, 在模拟中, 实际的时间起点可能与理论模型存在偏差, t_0 可以通过平移时间轴来消除这种偏差. 本研究在确定 (14) 式中 n 的值后得到 $t_0 = +0.00387$, n 值详见第 5 节. 泰勒尺度 λ 的定义:

$$\lambda = u \sqrt{15\nu/\varepsilon}. \quad (15)$$

同理 (8) 式的推导思路, 我们得到耗散率 ε 的修正公式:

$$\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon} = 1 - I_z \left(\frac{p+3}{2}, \frac{5}{6} - \frac{p}{2}; z \right). \quad (16)$$

根据 (16) 式要求, p 必须满足 $p < 5/3$, 在修正过程中 p 接近 $5/3$ 时 (16) 式右侧趋于 1, 即耗散率受低波数的影响可以忽略, 我们的 DNS 计算结果也表明, 利用谱方法 $\varepsilon_m = 2\nu \int_{k_L}^{\infty} k^2 E(k) dk$ 与梯度法 $\varepsilon_m = \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle$ 得到的计算误差小于 10^{-10} , 所以当 $p \geq 5/3$ 时取 $\varepsilon_m = \varepsilon$. 根据 (15) 式和 (16) 式可以得到 λ 的修正值, 通过对 (14) 式求导, 可以更方便地得到指数 n :

$$\frac{1}{\nu} \frac{d\lambda^2}{dt} = -\frac{10}{n}. \quad (17)$$

因此, 我们利用关系式 $p = -2n - 1$ 可以得到修正后的 p 值. 当 p 的初始假设值与其修正后的值相差小于 10^{-3} 时, 迭代过程截止.

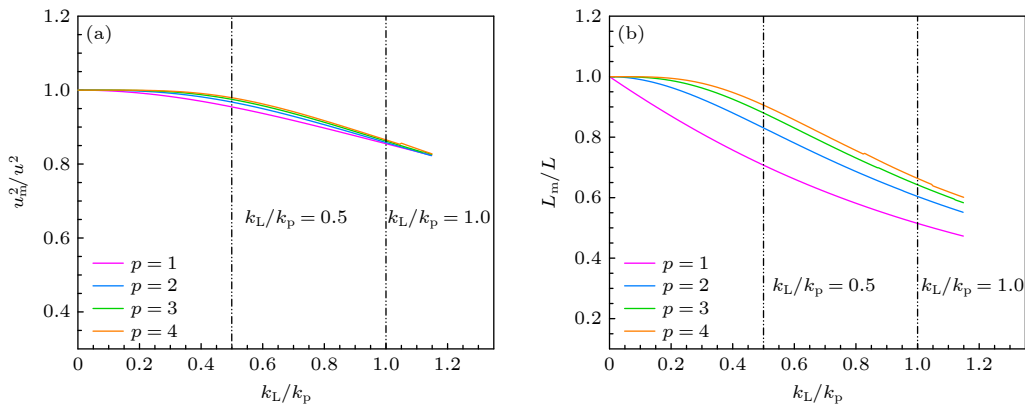


图 2 频谱指数 p 及低波数缺失程度 k_L/k_p 对统计参数修正的影响 (a) 对 u^2 的影响; (b) 对 L 的影响

Fig. 2. Effects of spectral exponent p and low-wavenumber deficiency ratio k_L/k_p on statistical parameters: (a) Impact on u ; (b) impact on L .

5 修正结果分析

5.1 湍流统计量

(14) 式中 n 值的确定依赖于泰勒尺度的动态演化特征. 图 3(a) 对比了修正前后泰勒尺度平方的时间导数 $d\lambda^2/\nu dt$ 的演化趋势, 在 $0.29725 < t < 0.30275$ 的区域内, 导数曲线趋于水平, 对应指数 $n = -1.40$. 此时修正前后导数值的拟合误差小于 5%, 有效验证了 (17) 式的理论预测. 泰勒尺度 λ 的修正依赖于均方根脉动速度 u 与耗散率 ε 的共同作用, 图 2(a) 中可以看出, 修正前后 u^2 的误差小于 5%, 而耗散率 ε 的修正贡献在参数 $p \geq 5/3$ 时可以忽略, 这表明 λ 的修正主要源于 u 的微小调整, 这在图 3(b) 的 λ^2 演化曲线中也得到体现. 值得注

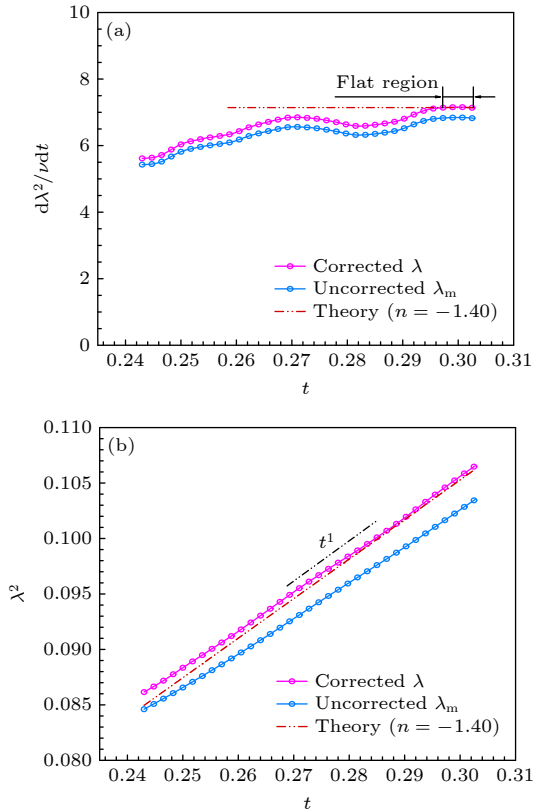


图 3 泰勒尺度随时间的演化特征 (a) 泰勒尺度平方的时间导数, 曲线在 $t > 0.29725$ 后呈现平坦特征, 双点划线为 $n = -1.40$ 理论线; (b) 泰勒尺度平方, 双点划线满足 $\lambda^2 \sim t^1$ 关系

Fig. 3. Evolution characteristics of the Taylor scale over time: (a) Time derivative of the Taylor scale squared. The curve exhibits a flat characteristic for $t > 0.29725$, with the double dot-dash line representing the theoretical line $n = -1.40$; (b) Taylor scale squared. The double dot-dash line corresponds to the $\lambda^2 \sim t^1$ relationship.

意的是, 当时间 $t > 0.27850$ 时, 修正后的 λ^2 曲线与 (14) 式理论预测的拟合误差小于 0.4%, 存在 $\lambda^2 \sim t^1$, 且实际的 λ_m^2 曲线也接近该线性关系. 湍动能随时间的演化如图 4 所示, 可以看出修正前后的数据均遵循 $u^2 \propto t^{-1.40}$ 的标度关系, 这与 Saffmann 和 Oberlack^[11,12] 在指数 $\sigma = 2$ 下得到的 $\bar{u}' \propto t^{-6/5}$ 框架吻合, 其中 $\bar{u}'$ 为湍动能的统计平均值. 图 5 为修正前后积分尺度 L 随时间的演化, 通过参数 p 的迭代优化, 模型恢复了低波数区 $E(k)/k$ 对积分尺度的贡献, 使得图 5 中 L 呈现出 Saffmann 和 Oberlack^[11,12] 的理论演化特性 $L \propto t^{2/5}$. 需要指出的是, 本研究受限于低波数的缺失 ($k_L/k_p = 1$), 导致了对积分尺度的低估, 这本质上反映了低波数信息缺失对能量级串的影响.

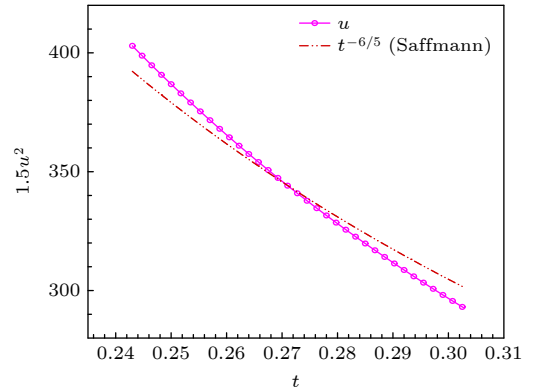


图 4 湍动能随时间演化. 双点划线满足 $u^2 \sim t^{-6/5}$ 关系. 已知修正前后 u^2 变化很小, 所以只做修正后的湍动能曲线 Fig. 4. Evolution of turbulent kinetic energy over time. The double dot-dash line corresponds to the $u^2 \sim t^{-6/5}$ relationship. Since the variation in u^2 before and after correction is negligible, only the corrected turbulent kinetic energy curve is plotted.

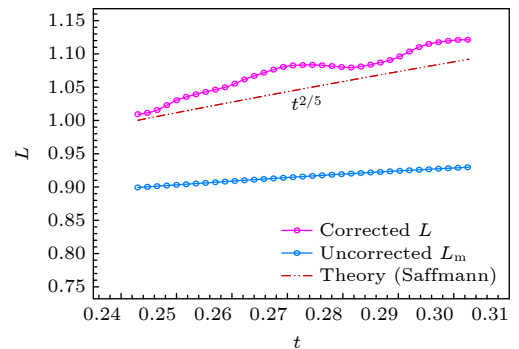


图 5 修正前后积分尺度随时间的演化. 双点划线满足 $L \sim t^{2/5}$ 关系

Fig. 5. Evolution of the integral scale before and after correction over time. The double dot-dash line corresponds to the $L \sim t^{2/5}$ relationship.

此外, 本文还将谱空间求得的积分尺度与物理空间利用速度相关函数计算得到的积分尺度 Λ 进行了对比. 在物理空间, 积分尺度的定义为 $\Lambda = \int_0^{r_0} \rho_{uu}(r) dr$, 其中, $\rho_{uu}(r) = \frac{\langle u(x)u(x+r) \rangle}{\langle u^2 \rangle}$ 是纵向脉动速度相关, 积分上限 r_0 取 $\rho_{uu}(r)$ 第一次为零值的距离. 图 6 展示了两种计算方法 (物理空间与谱空间) 计算得到的积分尺度比值随时间的演化. 可以看到, 物理空间积分尺度与修正后谱空间积分尺度的比值 (Λ/L) 小于其与未修正谱空间积分尺度的比值 (Λ/L_m), 且两比值都大于 1. 这说明在考虑了低波数的能谱信息之后, 谱空间积分尺度明显变大, 但其数值仍小于利用速度相关函数计算得到的积分尺度. 造成这一现象的主要原因有以下两点: 1) 本文的计算域不够大, 有研究表明计算域的长度至少在 8 倍积分尺度 Λ 的情况下 [1,17], 利用速度相关函数计算得到的积分尺度才能有较好的精度, 在本文中计算域的长度约为积分尺度 Λ 的 6 倍; 2) 本文虽然对谱空间进行了修正, 但本文算例中网格数较少, 因此谱空间中的波数也较少, 这会导致谱空间下积分尺度的数值仍然偏小 (在与本文算例计算域长度相同, 但网格数为 640^3 的另一个算例中, Λ/L 比本文更小, 约为 1.54). 理论上, 在网格数足够的情况下, 物理空间积分尺度与修正后谱空间积分尺度的比值 (Λ/L) 接近于 1.

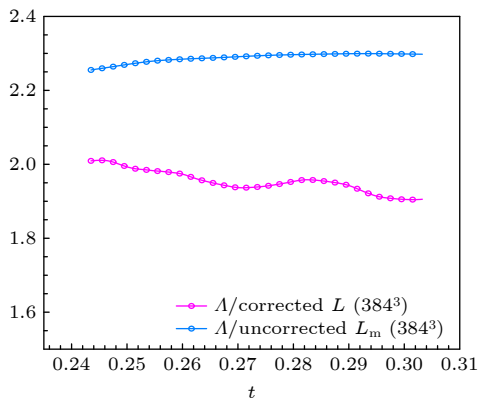


图 6 积分尺度之比随时间的演化

Fig. 6. Evolution of the integral scale ratio with time.

5.2 湍流耗散特性

与格栅湍流中非均衡性的研究类似, 我们通过考察耗散系数 C_ε 随时间的演化来判断整体能量传输与耗散之间是否均衡. 自由衰减湍流中耗散系数 C_ε 随时间的演化特性如图 7 所示, 修正前的 C_ε 稳

定, 符合统计均衡态特征, 这一结果在高雷诺数下的自由衰减湍流中被普遍接受. 值得注意的是, 修正前的 C_ε 维持小于 1 的恒定值, 这归因于能谱低波数缺失导致的积分尺度低估. 而修正后的结果呈现 $C_\varepsilon \sim Re_\lambda^{-1}$ 的标度关系, 表现出能量过度耗散特征, 这与 Goto 和 Vassilicos [19] 在湍流衰减初期阶段 (未达到统计平衡) 得到的高雷诺数实验结果一致. Bos 和 Rubinstein [31] 的理论推导进一步支持了这种非均衡耗散标度的合理性. 耗散系数出现差异的原因是: 尽管能谱 $E(k, t)$ 在中间波数区呈现 $k^{-5/3}$ 局部平稳特征, 但系统整体未达到平稳, 谱模型 (7) 式纳入大尺度动力学后, 这会导致能量输运与耗散的动态失衡, 进而得到非均衡统计特性. Steiros [32] 关于各项同性衰减湍流的研究也表明, 有限雷诺数下大尺度区的非均衡特性不能保证 Kolmogorov 耗散标度 $C_\varepsilon = 1$. DNS 和 EDQNM 模拟 [33,34] 证实: 当演化超过大尺度结构主导的能量集中区域时 (表现为 $kL \approx 2 - 10$ 区间的谱峰值), 黏性耗散逐渐消退, 系统便从新耗散尺度 $C_\varepsilon \sim Re_\lambda^{-1}$ 向经典耗散尺度 $C_\varepsilon = 1$ 转变. 因此随湍流的演化, 低波数缺失会进一步加剧, 使得 Kolmogorov 尺度占据主导地位, 湍流系统趋于均衡.

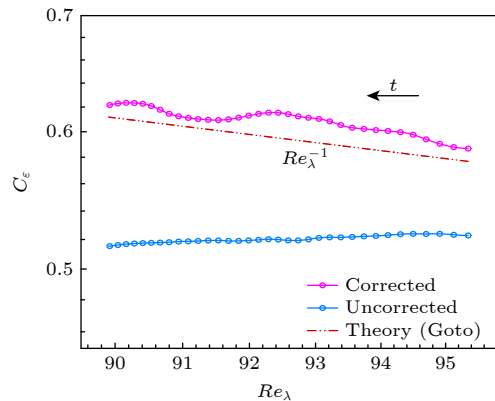


图 7 修正前后耗散系数 C_ε 随泰勒雷诺数 Re_λ 的变化. 双点划线满足 $C_\varepsilon \sim Re_\lambda^{-1}$ 关系. 箭头指示方向为时间演化方向

Fig. 7. Variation of the dissipation coefficient C_ε with the Taylor Reynolds number Re_λ before and after correction. The double dot-dash line corresponds to the $C_\varepsilon \sim Re_\lambda^{-1}$ relationship. The arrows indicate the direction of time evolution.

两个特征尺度的比值 L/λ 与 Re_λ 的关系也反映了这种非均衡特性, 如图 8 所示. 修正前的特征尺度比值存在 $L/\lambda \sim Re_\lambda^{-1}$ 关系, 这符合传统的 Kolmogorov 局部均衡理论预测 [8]. 修正后的 L/λ

呈现趋稳现象, 这源于在初始大尺度的扰动下, 耗散过程持续遵循新的耗散规律^[35] $\varepsilon \propto u^2/L^2$, 耗散系数呈现文献中报道的非均衡标度 $C_\varepsilon \sim Re_\lambda^{-1}$, 这与格栅湍流的研究结果一致^[36–39].

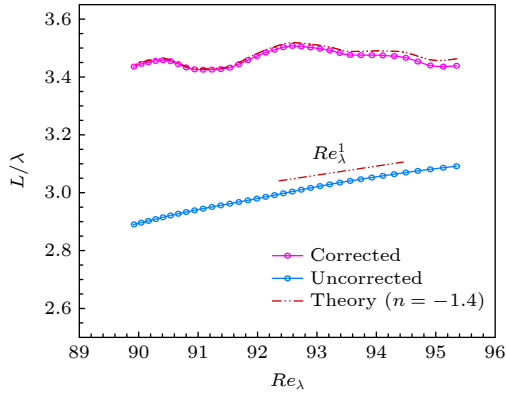


图 8 修正前后特征尺度 L/λ 比值随泰勒雷诺数 Re_λ 的演化. 双点划线满足 $L/\lambda \sim Re_\lambda^{-1}$ 关系

Fig. 8. Evolution of the characteristic scale ratio L/λ with the Taylor Reynolds number Re_λ before and after correction. The double dot-dash line corresponds to the $L/\lambda \sim Re_\lambda^{-1}$ relationship.

6 结 论

本研究基于广义 von Kármán 谱模型^[24], 系统地分析了低波数缺失对各向均匀同性湍流统计参数的影响. 受周期性边界条件和计算域尺寸限制, 实际 DNS 直接数值模拟方法因未能完全解析湍动能谱低波数区的大尺度运动, 导致积分尺度实际值 L_m 较理论真实值 L 显著偏低, 且误差随能谱峰值向低波数迁移而显著放大. 我们通过引入湍动能谱修正模型, 恢复了低波数区域 $E(k)/k$ 的贡献. 修正后的积分尺度 L 随时间的变化规律呈现 $L \propto t^{2/5}$, 这符合 Saffmann 理论预测的幂律关系; 修正后耗散系数 C_ε 的演化满足湍流非均衡耗散规律 $C_\varepsilon \sim Re_\lambda^{-1}$, 这与 Goto 和 Vassilicos^[19] 在湍流衰减初期阶段得到的高雷诺数实验结果一致. 研究通过重构数值模拟中缺失的能谱大尺度信息, 揭示了湍流系统的非平衡态特性, 证实了大尺度涡结构对湍流能量耗散过程具有显著调控作用. 进一步分析表明, 在有限雷诺数或者受初始条件影响较大的湍流流动中, 大尺度结构对流动的影响显著, 湍流无法在全尺度实现均衡. 这一发现突破了 Kolmogorov 的局部平衡假设, 将为湍流多尺度相互作用中大尺度结构的统计建模提供新范式.

参考文献

- [1] Pope S B 2001 *Turbulent flows* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [2] Warhaft Z, Lumley J L 1978 *J. Fluid Mech.* **88** 659
- [3] Porté-Agel F, Bastankhah M, Shamsoddin S 2020 *Boundary-Layer Meteorol.* **174** 1
- [4] Trush A, Pospíšil S, Kozmar H 2020 *WIT Trans. Eng. Sci.* **128** 113
- [5] Cotella Dalmau J, Oñate Ibáñez de Navarra E, Rossi R 2016 *Applications of turbulence modeling in civil engineering* (Barcelona: CIMNE)
- [6] Li M, Li M, Sun Y 2021 *J. Sound Vib.* **490** 115721
- [7] Taylor G I 1935 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **151** 421
- [8] Kolmogorov A N 1941 *Docl. Akad. Nauk SSSR A* **31** 538
- [9] Dryden H L 1943 *Q. Appl. Math.* **1** 7
- [10] Saffman P G 1967 *J. Fluid Mech.* **27** 581
- [11] Oberlack M 2002 *Proc. Appl. Math. Mech.* **1** 294
- [12] Comte-Bellot G, Corrsin S 1966 *J. Fluid Mech.* **25** 657
- [13] Bos W J T, Shao L, Bertoglio J P 2007 *Phys. Fluids* **19** 045101
- [14] Ishihara T, Morishita K, Yokokawa M, Uno A, Kaneda Y 2016 *Phys. Rev. Fluids* **1** 082403
- [15] Thornber B 2016 *Phys. Fluids* **28** 045106
- [16] O'Neill P L, Nicolaides D, Honnery D, Soria J 2004 *15th Australasian Fluid Mechanics Conference* The University of Sydney, Sydney, Australia, December 13–17, 2004 p1
- [17] Ishihara T, Gotoh T, Kaneda Y 2009 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **41** 165
- [18] Goto S, Vassilicos J C 2015 *Phys. Lett. A* **379** 1144
- [19] Tennekes H, Lumley J L 1972 *A First Course in Turbulence* (Massachusetts: MIT Press)
- [20] George W K 1992 *Phys. Fluids A* **4** 1492
- [21] Liu F, Lu L P, Bos W J T, Fang L 2019 *Phys. Rev. Fluids* **4** 084603
- [22] Wang H, Sonnenmeier J R, Gamard S, George W 2000 *International Congress of Theoretical and Applied Mechanics* Chicago, IL, August 27–September 1, 2000 p8
- [23] de Bruyn Kops S M, Riley J J 1998 *Phys. Fluids* **10** 2125
- [24] Von Karman T 1937 *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* **23** 98
- [25] Rogallo R S 1981 *Numerical Experiments in Homogeneous Turbulence* (Washington: NASA)
- [26] Wang C H, Fang L 2018 *Chin. Phys. Lett.* **35** 080501
- [27] Gamard S, George W K 2000 *Flow Turbul. Combust.* **63** 443
- [28] Wang H, George W K 2002 *J. Fluid Mech.* **459** 429
- [29] George W K, Wang H, Wollblad C, Johansson T G 2001 *14th Australasian Fluid Mechanics Conference* Adelaide University, Adelaide, Australia, December 10–14, 2001 p41
- [30] Batchelor G K 1953 *The Theory of Homogeneous Turbulence* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [31] Bos W J T, Rubinstein R 2017 *Phys. Rev. Fluids* **2** 022601
- [32] Steiros K 2022 *Phys. Rev. E* **105** 035109
- [33] Goto S, Vassilicos J C 2016 *Phys. Rev. E* **94** 053108
- [34] Krogstad P Å, Davidson P A 2012 *Phys. Fluids* **24** 035103
- [35] Steiros K 2022 *Phys. Rev. Fluids* **7** 104607
- [36] Vassilicos J C 2015 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **47** 95
- [37] Mazellier N, Vassilicos J C 2010 *Phys. Fluids* **22** 075101
- [38] Valente P C, Vassilicos J C 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 214503
- [39] Liu F, Fang L, Shao L 2020 *Chin. Phys. B* **29** 114702

Correction of turbulent integral length scale and its influence on turbulent dissipation law^{*}

WANG Yujie¹⁾ YANG Junsheng¹⁾ WANG Jie²⁾
ZHOU Yanhong¹⁾ LIU Feng^{1)3)†}

1) (*School of Energy and Power Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China*)

2) (*System Engineering Research Center, Aero Engine Academy of China, Beijing 101304, China*)

3) (*School of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China*)

(Received 6 May 2025; revised manuscript received 19 June 2025)

Abstract

Turbulence modeling relies critically on accurate characterization of large-scale structures, with the integral length scale L serving as a key parameter for industrial applications ranging from combustion stability optimization to wind farm design and aerodynamic load prediction. However, direct numerical simulation (DNS) of turbulence faces inherent limitations in resolving all wavenumbers within the low-wavenumber region of the turbulent kinetic energy spectrum due to finite computational domain sizes. This unresolved low-wavenumber deficiency leads to incomplete characterization of large-scale structures and introduces systematic deviations in key statistical quantities, particularly the integral length scale L and turbulence dissipation coefficient C_ε . As turbulence evolves, the spectral peak wavenumber k_p migrates toward lower wavenumbers, exacerbating the loss of large-scale information and causing computed statistics to diverge from physical reality. In this study, we perform high-fidelity DNS of homogeneous isotropic decaying turbulence in a periodic cubic domain of side length 4π with 384^3 grid points. The DNS is executed by using a standard pseudospectral solver and a fourth-order Runge-Kutta time integration scheme, with a semi-implicit treatment of the viscous term. The spatial resolution $k_{\max}\eta = 1.65$ ensures adequate resolution of dissipative scales (η is the Kolmogorov scale). Simulations start from a fully developed field initialized with a spectrum matching Comte-Bellot and Corrsin's experimental data and evolve within a time interval where turbulence exhibits established isotropic decay characteristics. Existing correction models, predominantly based on equilibrium turbulence assumptions, fail to accurately represent the non-equilibrium dynamics governed by large-scale structures. According to the generalized von Kármán spectrum model, we use a correction framework to explain the unresolved low-wavenumber contributions in homogeneous isotropic decaying turbulence. The DNS data reveal that the uncorrected integral scale L_m significantly underestimates the true L , with errors escalating as k_L/k_p increases, where k_L is the minimum resolvable wavenumber in the simulation domain. After correction, L exhibits a temporal evolution following the Saffman-predicted power-law relationship $L \propto t^{2/5}$, contrasting sharply with the underestimated pre-correction values. Although the spectral correction substantially increases the spectral integral scale L , its value remains less than the physically derived integral scale Λ computed from the velocity correlation function, which is primarily due to the finite domain size limiting large-scale statistics and the moderate grid resolution, though higher-resolution simulations with the same domain show L converging towards Λ . Notably, the unmodified dissipation coefficient C_ε remains constant, which is consistent

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12002318), the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. 2022M721630), and the Fundamental Research Program of Shanxi Province, China (Grant No. 202303021221118).

[†] Corresponding author. E-mail: feng.liu@nuc.edu.cn

with equilibrium turbulence assumptions, whereas the corrected C_ε evolves according to the non-equilibrium scaling law $C_\varepsilon \sim Re_\lambda^{-1}$. Further analysis confirms that the ratio L/λ shifts from Kolmogorov's Re_λ^1 dependence to a Reynolds-number-independent plateau after correction, fundamentally changing the turbulence dissipation paradigm. This transition from equilibrium to non-equilibrium dissipation behavior underscores the dominant role of large-scale structures in regulating energy cascade dynamics. Our results demonstrate that finite Reynolds numbers or strong initial-condition effects amplify the non-equilibrium characteristics of turbulence, hindering the full-scale equilibrium. These findings reconcile long-standing theoretical discrepancies and provide a paradigm for modeling scale interactions in turbulence.

Keywords: isotropic turbulence, integral length scale, low-wavenumber deficiency, von Kármán spectrum model

PACS: 47.27.-i, 47.27.Gs

DOI: [10.7498/aps.74.20250594](https://doi.org/10.7498/aps.74.20250594)

CSTR: [32037.14.aps.74.20250594](https://cstr.net.cn/detail/32037.14.aps.74.20250594)

湍流积分尺度修正及其对湍流耗散规律的影响

王宇杰 杨君圣 王杰 周彦宏 刘锋

Correction of turbulent integral length scale and its influence on turbulent dissipation law

WANG Yujie YANG Junsheng WANG Jie ZHOU Yanhong LIU Feng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 174703 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250594

CSTR: 32037.14.aps.74.20250594

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250594>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

声波扰动对大气湍流内外尺度与折射率功率谱函数的影响分析

Analysis of influence of acoustic wave disturbance on internal and external scale and refractive index power spectrum function of atmospheric turbulence

物理学报. 2023, 72(12): 124303 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230003>

环形运动势搅拌下偶极玻色-爱因斯坦凝聚体中的von Kármán涡街

von Kármán vortex street in dipole BEC induced by a circular moving potential

物理学报. 2023, 72(8): 080501 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222312>

沙尘湍流大气对自由空间量子通信性能影响研究

Influence of sand and dust turbulent atmosphere on performance of free space quantum communication

物理学报. 2022, 71(22): 220302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221125>

双组分玻色-爱因斯坦凝聚体中PT对称势下的异步量子Kármán涡街

Asynchronous quantum Kármán vortex street in two-component Bose-Einstein condensate with PT symmetric potential

物理学报. 2024, 73(11): 110501 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20232003>

HL-2A托卡马克电子回旋共振加热调制对湍流驱动和传播的影响

Effects of electron cyclotron resonance heating modulation on edge turbulence driving and spreading in HL-2A tokamak

物理学报. 2025, 74(5): 055202 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20241263>

湍流大气中随机粗糙表面激光回波空间相干性仿真

Simulation of spatial coherence of laser echo light field from random rough surface in turbulent atmosphere

物理学报. 2022, 71(14): 140201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212420>