

庞加莱规范引力对 TOV 方程的修正*

郭征瑞^{1) #} 刘荷蕾^{1) †} 吕国梁^{1) #} 马永革^{1) 2)}

1) (新疆大学物理科学与技术学院, 乌鲁木齐 830046)

2) (北京师范大学物理与天文学院, 北京 100875)

(2025 年 5 月 16 日收到; 2025 年 7 月 11 日收到修改稿)

庞加莱规范引力理论近年来在引力与天体物理领域受到广泛关注和应用. 因此, 如何从实验观测上区分广义相对论和庞加莱规范引力理论已经成为一个重要的课题. 中子星作为引力极强的天体, 为检验引力理论提供了理想试验场, 目前, 庞加莱规范引力理论对中子星性质的研究十分稀少, 鉴于庞加莱规范引力理论的重要性, 有必要在庞加莱规范引力理论的框架下研究中子星的性质, 进而考察能否通过对中子星的观测来区分和检验庞加莱规范引力理论和广义相对论. 本文在庞加莱规范引力理论框架下, 由特定的引力场方程推导出了修改的球对称静态中子星的 Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程, 并进一步研究了挠率对静态中子星质量半径关系的影响. 分析表明, 在一定的条件下, 该理论模型中静态中子星的质量半径关系与广义相对论中的结果一致. 本文为在庞加莱规范引力框架下进一步研究自转中子星的质量半径关系提供了理论基础和参考方法.

关键词: 庞加莱规范引力, 挠率, 中子星, Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程**PACS:** 04.50.Kd, 04.40.Dg**DOI:** 10.7498/aps.74.20250644**CSTR:** 32037.14.aps.74.20250644

1 引言

广义相对论的创立极大地推进了物理学和天文学的发展, 其引力几何化的思想将人类对引力和时空的认知推向了前所未有的高度, 并且广义相对论在诞生后经受住了一系列实验的检验, 如水星近日点进动、光线偏折和引力红移效应等, 近年来, 随着科学技术的发展, 人们通过更高水平的观测和更精密的实验也验证了广义相对论的准确性^[1-6]. 然而, 随着天文观测技术的不断提高, 观测数据也揭示了一些广义相对论无法解释的天文现象. 人们发现星系旋转曲线速率和宇宙加速膨胀无法通过广义相对论得到合理的解释^[7,8], 用广义相对论解

释就必须引入暗物质和暗能量这两个假设性概念, 而这两者到目前为止既没能被直接探测到^[9], 也缺乏基本理论的解释. 并且, 近年来的观测数据还表明, 中子星的最大质量超出了广义相对论计算出的理论极限^[10-13]. 此外, 广义相对论与 20 世纪另一物理学支柱理论-量子力学之间的矛盾没有解决. 这些问题都使人们期待能够构建一种新的引力理论, 其既能符合支持广义相对论的实验观测, 又能在更大尺度上解释宇宙观测现象而避免引入暗物质和暗能量.

为了解决上述问题, 一些物理学家提出了各种类型的修改引力理论. 例如, 五维 Kaluza-Klein 引力可以在不考虑暗能量的情况下通过更高维度解释宇宙加速膨胀^[14]; $f(R)$ 引力通过引入 R^2 或其

* 国家自然科学基金 (批准号: 12263006)、新疆维吾尔自治区自然科学基金 (批准号: 2024D01C52) 和新疆维吾尔自治区重大科技专项子课题 (批准号: 2022A03013-3) 资助的课题.

同等贡献作者.

† 通信作者. E-mail: heleiliu@xju.edu.cn

余项对爱因斯坦-希尔伯特作用量进行修正^[15-17], 可以解释宇宙早期的暴胀现象, 是替代暗能量的良好候选者; $f(T)$ 引力通过构建挠率标量 T 作为基本拉格朗日量且曲率 R 为零, 与 $f(R)$ 引力一样可以描述宇宙早期暴胀^[18,19]; $f(R, T)$ 引力作为 $f(R)$ 引力的推广, 其作用量的引力部分不仅依赖于里奇标量 R , 还依赖于能量动量张量的迹 T , 该引力通过引力场方程中的额外项可以解释宇宙的加速膨胀^[20,21], 对引力透镜也有很大贡献. 此外还有 $f(G)$ 引力、 $f(R, G)$ 引力、 $f(R, L_m, T)$ 引力等多个修改引力模型被提出^[22-28], 这些修改引力理论已被广泛应用在致密星、早期宇宙、引力波等多个领域.

庞加莱规范引力理论在引力研究中占据重要地位. 在物质场相互作用的基本理论方面, 规范理论成功将电磁-弱-强相互作用统一在一个理论框架内^[29-31], 受此启发, 一些研究者试图将引力理论纳入到规范理论的框架中, 这一构想的核心是将闵可夫斯基时空的整体对称性局域化^[32,33], 由此引入 6 个洛伦兹规范势和 4 个平移规范势, 并用这 10 个补偿场来描述引力. 庞加莱规范引力理论描述的时空天生具有 Riemann-Cartan 几何的结构, 洛伦兹规范势对应于自旋联络, 平移规范势对应于对偶标架, 洛伦兹规范场强和平移规范场强对应于时空内禀的曲率和挠率, 所以庞加莱规范引力理论的核心是在时空中引入挠率, 广义相对论可以视作庞加莱规范引力理论在无挠情况下的特殊情况, 引力几何化的思想得到了继承和发展.

这一理论的一些模型能够在一定程度上解释暗物质问题和暗能量问题^[34-36]. 一些模型在特定的星系模型中计算出的旋转速率可以趋于恒定值, 这与目前的观测现象大致吻合, 并且研究了九参数宇称守恒量在宇宙演化中的作用, 提出了新的物理机制和理论途径^[35,36], 发现其能够自然地解释宇宙早期的暴胀和后期的加速膨胀现象. 此外, 一些模型推导出了一类新的具有动态无质量挠率的静态、球对称黑洞真空解^[37], 这类解与广义相对论下 Reissner-Nordstrom 解的形式相似. 因此, 如何从实验观测上区分和检验广义相对论和庞加莱规范引力理论已经成为一个重要的课题.

极端天体物理现象为检验引力理论提供了很好的试验场, 作为引力极强的天体, 中子星的提出与发现是一个历经坎坷的过程^[38-47]. 目前, 庞加莱规范引力理论对中子星性质的研究仍十分稀少, 鉴

于庞加莱规范引力理论的重要性, 很有必要在庞加莱规范引力理论的框架下研究中子星的性质, 进而考察能否通过对中子星的观测来区分和检验庞加莱规范引力理论和广义相对论. 在一些庞加莱规范引力理论的模型中, 粒子的自旋张量成为挠率的来源, 很有可能在 Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) 方程中引入新的物理效应, 这种修正可能会在中子星结构的研究中揭示与广义相对论不同的物理现象, 得到新的中子星质量半径关系, 从而为在中子星的观测现象中区分两种基本引力理论提供依据.

本文在第 2 节基于特定的庞加莱规范引力场方程, 推导出了球对称条件下静态中子星的修正 TOV 方程. 第 3 节通过庞加莱规范引力理论的修正 TOV 方程, 详细分析了静态中子星的质量半径关系, 并揭示了挠率对静态中子星质量半径关系的影响, 之后讨论了该特定引力场方程对自转中子星性质的研究. 在第 4 节总结本文的研究工作, 并对未来的研究方向进行了展望.

2 庞加莱规范引力理论的修改 TOV 方程

为了得到修改的 TOV 方程, 需要求解庞加莱规范引力理论的引力场方程. 为了得到引力场方程, 需要研究庞加莱规范引力理论的引力场拉氏量, 庞加莱规范引力理论 (不包含宇宙学常数) 最一般的拉氏量为^[48]

$$L_G = R + a_1 T_{cab} T^{cab} + a_2 T_{acb} T^{cab} + a_3 T^d{}_d T^c{}_c + b_1 R_{abcd} R^{abcd} + b_2 R_{abcd} R^{acbd} + b_3 R_{abcd} R^{cdab} + b_4 R_{ac} R^{ac} + b_5 R_{ac} R^{ca} + b_6 R^2, \quad (1)$$

式中, R 是里奇标量, 是曲率张量的缩并; a_1 — a_3 和 b_1 — b_6 是未知系数; T 是挠率张量.

为了简单计算, 我们考虑一种比较简单的庞加莱规范引力下的引力场拉氏量:

$$L_G = R + a_1 T_{cab} T^{cab} + a_2 T_{acb} T^{cab} + a_3 T^d{}_d T^c{}_c. \quad (2)$$

通过最小作用量原理, 得到国际单位制下的引力场方程:

$$\begin{aligned} \frac{16\pi G}{c^4} \theta_{ab} = & -Rg_{ab} + 2R_{ab} \\ & + 4a_1 \left(T_{cbd} T^cd{}_a - \tilde{\nabla}_c T_b{}^c{}_a + K^d{}_{bc} T_d{}^c{}_a + \frac{1}{4} T_{cde} T^{cde} g_{ab} \right) \\ & + 2a_2 (\tilde{\nabla}_c T^c{}_{ab} - \tilde{\nabla}_c T_{ab}{}^c + T^c{}_{da} K^d{}_{bc} - T_{ad}{}^c K^d{}_{bc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathbf{T}^c_{da} \mathbf{T}^d_{bc} - \mathbf{T}^c_{ad} \mathbf{T}^d_{bc} + \frac{1}{2} \mathbf{T}^c_{dce} \mathbf{T}^{cde} g_{ab}) \\
 & + a_3 (\tilde{\nabla}_b \mathbf{T}^c_{ac} - g_{ab} \tilde{\nabla}_c \mathbf{T}^{dc}_d - \mathbf{T}^c_{ac} \mathbf{K}^d_{bd} + \mathbf{T}^c_{dc} \mathbf{K}^d_{ab} \\
 & - \mathbf{T}^c_{ac} \mathbf{T}^d_{bd} + \mathbf{T}^c_{dc} \mathbf{T}^d_{ab} + \frac{1}{2} \mathbf{T}^c_{ec} \mathbf{T}^{de}_d g_{ab}), \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{16\pi G}{c^4} \mathbf{S}^c_{ab} = & \mathbf{T}^c_{ab} - \delta_b^c \mathbf{T}^d_{ad} + \delta_a^c \mathbf{T}^d_{bd} \\
 & + 2a_1 (\mathbf{T}^c_{ba} - \mathbf{T}^c_{ab}) \\
 & + a_2 (2\mathbf{T}^c_{ba} + \mathbf{T}^c_{ba} - \mathbf{T}^c_{ab}) \\
 & + a_3 (\delta_a^c \mathbf{T}^d_{bd} - \delta_b^c \mathbf{T}^d_{ad}), \quad (4)
 \end{aligned}$$

其中, θ_{ab} 为能动张量, $\mathbf{S}^c_{ab}$ 为自旋张量, G 是万有引力常数, c 是光速, g 是时空度规, K 是组合挠率张量, δ 是克罗内克尔符号. 由于目前我们认为庞加莱规范理论引力场方程在线性近似情况下应该可以回到牛顿引力下的 Poisson 方程, 根据这一条件, 可以将引力场方程 (3) 和 (4) 的未知参数进行求解得到:

$$a_2 = -2a_1 - 2, \quad a_3 = 5/3. \quad (5)$$

这样原方程的未知参数就只剩下 1 个, 大大简化了求解庞加莱规范引力理论方程的难度. 目前, 通过弱引力场与低速条件的线性近似, 还无法得到未知系数 a_1 的限制. 未来通过广义相对论的经典实验来检验庞加莱规范引力理论, 例如水星近日点进动与光线偏折现象, 由于这些实验具有较高的观测精度, 可能会给出未知系数 a_1 的限制.

为了简化计算, 本文假设中子星处于静态, 不考虑其自转以及膨胀或收缩等动态过程, 并且假设中子星内部的时空度规为国际单位制下的球对称度规:

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)} c^2 dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (6)$$

其中, ds^2 是时空线元, r 是球对称坐标系中以球心为起点的径向长度, t 是时间, θ 是方位角, λ 是时空度规的函数. 我们选取合适的挠率不为零分量 [37]:

$$T^1_{01} = b(r), \quad T^2_{02} = T^3_{03} = c(r). \quad (7)$$

选择以上挠率不为零分量可以使计算变得简单, 比较容易得到修正的 TOV 方程. 在庞加莱规范引力理论中, 将流体的自旋当成时空挠率的来源 [49,50], 设流体四速 u^a , 选取四速为 4 标架的第零基矢 $(e_0)^a$, 还有 3 个互相正交的空间标架 $\{(e_i)^a\} i = 1, 2, 3$. 自旋流体的性质由粒子数密度 n 、单个粒子的自旋张

量 μ^{ij} 、固有能量密度 ρ 和压强 p 描述, 流体的自旋密度可以表示为

$$S^{ab} = -\frac{1}{2} n (e_i)^a (e_j)^b \mu^{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (8)$$

自旋流体的能动张量和自旋张量为

$$\theta_{ab} = p g_{ab} + u_a u_b \left(\frac{p}{c^2} + \rho \right) + 2 u_a u^c \nabla_d S^d_{cb}, \quad (9)$$

$$S^c_{ab} = u^c S_{ab}. \quad (10)$$

现在, 将方程 (7) 和 (9) 代入第 1 个引力场方程 (3) 中得到庞加莱规范引力场方程的分量方程:

$$e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} = -\frac{8\pi G}{c^2} \rho - A(r), \quad (11)$$

$$e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} p - B(r), \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 e^{-2\lambda} \left[\frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial \nu}{\partial r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right] \\
 = \frac{8\pi G}{c^4} p - C(r), \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{7}{3} \frac{\partial b(r)}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial c(r)}{\partial r} - \left(8a_1 + \frac{20}{3} \right) b(r) \frac{\partial \nu}{\partial r} \\
 + \frac{2}{3} c(r) \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{4}{r} [b(r) - c(r)] = 0, \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8a_1 + 7) \frac{\partial b(r)}{\partial r} - \left(8a_1 + \frac{17}{3} \right) b(r) \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{2}{3} c(r) \frac{\partial \nu}{\partial r} \\
 + \frac{16a_1 + 18}{r} [b(r) - c(r)] = 0. \quad (15)
 \end{aligned}$$

方程 (11)–(13) 中, 挠率的修正方程为

$$\begin{aligned}
 A(r) &= f(r) \frac{1}{c^2} \left[-\frac{9}{8} b^2(r) - \frac{5}{4} c^2(r) + 2b(r)c(r) \right], \\
 B(r) &= f(r) \frac{1}{c^2} \left[-\frac{5}{8} b^2(r) - \frac{11}{12} c^2(r) - \frac{5}{6} b(r)c(r) \right], \\
 C(r) &= f(r) \frac{1}{c^2} \left[\frac{17}{24} b^2(r) - \frac{1}{3} c^2(r) - \frac{11}{4} b(r)c(r) \right], \quad (16)
 \end{aligned}$$

其中, $f(r) = e^{-2\nu}$. 至此, 我们得到了一系列新的包含挠率的引力场方程. 方程 (11)–(13) 的形式与广义相对论中引力场方程的形式类似, 将包含挠率的时空几何与物质联系到了一起. 方程 (14) 和 (15) 是关于 $e^{2\nu}$ 的方程. 方程 (16) 是挠率的修正方程. 这些方程有利于进一步求解庞加莱规范理论引力场方程, 从而得到修正的 TOV 方程.

将上述引力场方程 (11)–(13) 进行求解, 得到修正的 TOV 方程:

$$\begin{aligned}
 \frac{G}{c^4} \frac{dp}{dr} = & - \frac{\left[\frac{G}{c^2} \rho + \frac{1}{8\pi} A(r) \right] \frac{GM}{c^2}}{r^2} \left[1 + \frac{\frac{G}{c^4} p - \frac{1}{8\pi} B(r)}{\frac{G}{c^2} \rho + \frac{1}{8\pi} A(r)} \right] \left\{ 1 + \frac{4\pi r^3 \left[\frac{G}{c^4} p - \frac{1}{8\pi} B(r) \right]}{\frac{GM}{c^2}} \right\} \\
 & \times \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{1}{r} \int_0^r r^2 A(r) dr \right]^{-1} - \frac{1}{2} \left[\frac{G}{c^4} p + \frac{G}{c^2} \rho + \frac{1}{8\pi} A(r) - \frac{1}{8\pi} B(r) \right] \left[\frac{1}{r} \int_0^r r^2 A(r) dr \right] \\
 & \times \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{1}{r} \int_0^r r^2 A(r) dr \right]^{-1} + \frac{1}{4\pi r} [B(r) - C(r)] + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial B(r)}{\partial r}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

当方程 (17) 中 $b(r)$ 和 $c(r)$ 均为 0 时, 即挠率为 0 时, $A(r)$, $B(r)$ 和 $C(r)$ 均变为 0, 方程将回到广义相对论下标准的 TOV 方程.

3 庞加莱规范引力理论下中子星的质量半径关系

3.1 挠率对静态中子星质量半径关系的影响

在第 2 节求解庞加莱规范引力场的能动张量方程 (3) 得到了修正的 TOV 方程后, 为了得到挠率对静态中子星质量与半径关系的影响, 需要对挠率修正项进行分析, 在庞加莱规范引力理论中, 将粒子的自旋张量视为挠率的来源, 即粒子的自旋张量会对时空产生新的影响, 这需要用自旋张量来表示时空挠率. 现在求解庞加莱规范引力场的自旋张量方程 (3), 得到挠率 $b(r)$ 和 $c(r)$ 关于自旋张量的表达式:

$$\begin{aligned}
 b(r) &= -\frac{768}{135} \pi \frac{G}{c^4} S^3_{03} + \frac{336}{135} \pi \frac{G}{c^4} S^1_{01}, \\
 c(r) &= -\frac{48}{135} \pi \frac{G}{c^4} S^3_{03} - \frac{384}{135} \pi \frac{G}{c^4} S^1_{01}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

由于粒子的自旋张量方程 (10) 过于复杂, 并且研究的修正 TOV 方程是静态中子星的 TOV 方程, 所以我们主要考虑粒子本身的角动量对方程 (17) 产生的影响. 当前天体物理学界对中子星内部物质的精确组成仍存在很多不确定之处^[1], 但基于现有的理论和观测证据, 普遍认为其核心区域主要由简并中子构成, 所以在本文的研究中采用较为保守的假设, 中子星的主要组成物质由中子组成, 中子星的粒子数密度大约为: $n = \rho/m$, m 为单个粒子的质量, μ^{ij} 与粒子的自旋角动量相关, 粒子的自旋角动量与 $\hbar$ 成正相关, 所以单个粒子的自旋张量的数量级大约为 10^{-34} , 我们利用这些物理量, 结合对引力场方程 (14) 和 (15) 的分析, 最终得到挠率的修正方程为

$$\begin{aligned}
 A(r) &\approx -0.34 \times 10^{-14} \rho^2 \pi^2 \frac{G^2}{c^6}, \\
 B(r) &\approx -2.16 \times 10^{-14} \rho^2 \pi^2 \frac{G^2}{c^6}, \\
 C(r) &\approx -2.16 \times 10^{-14} \rho^2 \pi^2 \frac{G^2}{c^6}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

从方程 (19) 可以看出, 挠率的修正方程中有很小的数值, 如 $\frac{G^2}{c^6}$, 将方程 (19) 代入修正的 TOV 方程 (17) 中进行比较, 修正项 $A(r)$ 和 $B(r)$ 的数量级与 $\frac{G}{c^2} \rho$ 和 $\frac{G}{c^4} p$ 的数量级相比可忽略不计, 且 $A(r)$, $B(r)$ 和 $C(r)$ 本身就是很小的数值, 综合来看, 挠率修正方程 (19) 对修正的 TOV 方程 (17) 影响很小, 在一定程度上可以忽略不计. 所以可认为在球对称时空度规条件下, 当中子星处于静态时, 庞加莱规范引力计算的中子星质量半径关系与广义相对论计算出的质量半径关系一致.

3.2 讨论

目前, 我们已经通过特定的庞加莱规范引力理论计算了静态中子星的质量半径关系. 但在实际的天体物理环境中, 中子星通常具有显著的角动量, 所以本文在完成对静态中子星质量半径关系的研究后, 尝试对自转中子星的质量半径关系进行研究. 假设中子星绕 z 轴旋转, 角速度为 ω , 重新计算特定的引力场方程 (3), 得到新的引力场方程:

$$e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} = -\frac{8\pi G}{c^2} \sigma \rho - A(r), \quad (20)$$

$$\sigma = \frac{c^2 e^{2\nu} + \frac{p}{\rho c^2} \omega^2 r^4 \sin^4 \theta}{c^2 e^{2\nu} - \omega^2 r^4 \sin^4 \theta}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 & r^2 \sin^2 \theta e^{-2\lambda} \left[\frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial \nu}{\partial r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right] \\
 &= r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{8\pi G}{c^4} \lambda p - C(r) \right], \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\rho}{p} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{c^2 \omega^2 r^6 \sin^6 \theta}{c^2 e^{2\nu} - \omega^2 r^4 \sin^4 \theta} + 1, \quad (23)$$

$$-\frac{7}{3} \frac{\partial b(r)}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial c(r)}{\partial r} - \left(8a_1 + \frac{20}{3} \right) b(r) \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{2}{3} c(r) \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{4}{r} [b(r) - c(r)] = -\frac{32\pi G u_0 u^0 S^3_{03}}{c^4 r}, \quad (24)$$

$$\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_0 u_3 = 0, \quad (25)$$

其中

$$u_0 = \frac{-c^3 e^{2\nu}}{\sqrt{c^2 e^{2\nu} - \omega^2 r^4 \sin^4 \theta}},$$

$$u_3 = \frac{c \omega r^3 \sin^3 \theta}{\sqrt{c^2 e^{2\nu} - \omega^2 r^4 \sin^4 \theta}}.$$

其余引力场方程与静态中子星的引力场方程相同, 引力场方程的 03 ($a = 0, b = 3$) 分量方程, 即方程 (25): $(\rho + p/c^2) u_0 u_3 = 0$. 在通常情况下, 中子星的自转频率可到每秒上百圈, 所以其自转角速度 ω 是一个不可忽略的数值, 相应的 u_3 是一个影响较大的数值; 从 u_0 的表达式可以看出, u_0 也是一个不可忽略的数值. 同时, 在中子星内部, 由于固有能量密度 ρ 和压强 p 在数值上都是正值, 所以 $(\rho + p/c^2)$ 的数值也是正值, 不可能为零, 方程 (25) 在现有物理条件下无法自洽. 从物理角度来看, 这是由于中子星的自转会破坏时空球对称性导致的. 这表明, 在当前的球对称时空条件下, 我们选择的特定庞加莱规范引力理论无法适用于自转中子星的模型, 未来如何解决这一问题将成为重要的研究方向.

此外, 通过庞加莱规范引力研究广义相对论的经典实验, 如水星近日点进动与光线偏折现象, 分析挠率是否对这些经典实验的结果有影响, 可以使庞加莱规范引力理论更具可靠性, 对庞加莱规范引力具有重要意义. 未来这一研究方向也将成为我们工作的重点.

4 总结与展望

本文在庞加莱规范引力理论框架下, 基于特定的引力场方程 (3) 和 (4) 推导了球对称时空条件下静态中子星的 TOV 方程, 并利用该方程研究了静态中子星的质量与半径关系. 研究结果表明, 在球对称时空中, 当中子星处于静态且仅考虑粒子的自

旋张量时 (数量级为 10^{-34}), 庞加莱规范引力理论计算出的中子星质量与半径关系和广义相对论的结果一致. 这表明在静态情形下, 挠率对中子星质量与半径关系的修正效应可以忽略不计.

然而, 目前的研究仅局限于球对称时空度规条件下的静态中子星. 在实际天体物理环境中, 中子星通常具有显著的角动量, 其自转效应在中子星的结构和演化中扮演着重要角色, 因此, 有必要进一步尝试在庞加莱规范引力理论框架下, 对自转中子星质量半径关系展开研究, 本文为下一步的研究提供了理论基础和参考方法.

接下来的研究工作可以从以下几方面入手: 首先, 可以考虑庞加莱规范引力理论不同于拉氏量 (2) 的其他模型重新计算静态中子星的质量与半径关系. 其次, 目前所选取的挠率非零分量仅为球对称时空条件下的一部分分量, 还可以考虑更多的挠率非零分量进行计算. 再有, 以本文对静态中子星的研究为基础, 进一步探究挠率对转动中子星质量与半径关系的影响.

综上所述, 庞加莱规范引力理论蕴含着丰富的物理思想, 本文在特定的庞加莱规范引力理论中得到了修改的中子星 TOV 方程, 并进一步研究挠率对中子星质量半径关系的影响, 尽管当前还处于研究的初步阶段, 本文结果为今后的有关研究提供了有益的参考.

参考文献

- [1] Qin C G, Tan Y J, Lu X Y, Liu T, Yang Y R, Li Q, Shao C G 2025 *Phys. Rev. D* **111** 055008
- [2] Qin C G, Liu T, Dai X Y, Guo P B, Huang W, Liu X P, Tan Y J, Shao C G 2025 *Class. Quantum. Grav.* **42** 135006
- [3] Paulo C C, Freire, Wex N 2024 *Living. Rev. Rel.* **27** 5
- [4] Worden P, Overduin J 2024 *J. Minkowski. Inst. Mag.* **9** 1
- [5] Shao L J 2023 *Lect. Notes. Phys.* **1017** 385
- [6] Paugnat H, Lupsasca A, Vincent F H, Wielgus M 2022 *Astron. Astrophys.* **668** A11
- [7] Leane R K, Tong J 2025 *J. Instrum.* **20** T04001
- [8] Leane R K, Tong J 2024 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **12** 031
- [9] Kang S, Scopel S, Tomar G, Yoon J H 2019 *Astropart. Phys.* **109** 1
- [10] Das H C, Burgio G F 2025 *Universe* **11** 159
- [11] Yuan W L, Huang C, Zhang C, Zhou E, Xu R X 2025 *Phys. Rev. D* **111** 063033
- [12] Bhattacharjee D, Chattopadhyay P K 2024 *Eur. Phys. J. C* **84** 77
- [13] Romani R W, Kandel D, Filippenko A V, Brink T G, Zheng W K 2022 *Astrophys. J. Lett.* **934** L17
- [14] Jusufi K, Luciano G G, Sheykhi A, Samart D 2025 *J. High Energy Astrophys.* **47** 100373

- [15] Chatterjee A, Roy R, Dey S, Bandyopadhyay A 2024 *Eur. Phys. J. C* **84** 236
- [16] Chatterjee A, Gong Y 2025 *Ann. Phys.* **478** 170036
- [17] Chatterjee A 2024 *Class. Quantum. Grav.* **41** 095007
- [18] Landry A 2025 *Mathematics* **13** 1003
- [19] Koussour M, Altaibayeva A, Bekov S, Holmurodov F, Muminov S, Rayimbaev J 2024 *Phys. Dark. Univ.* **46** 101664
- [20] Koussour M, Altaibayeva A, Bekov S, Donmez O, Muminov S, Rayimbaev, J 2024 *Phys. Dark. Univ.* **46** 101577
- [21] Maurya D C, Myrzalulov R 2024 *Eur. Phys. J. C* **84** 534
- [22] Sharif M, Saba S 2019 *Chin. J. Phys.* **58** 202
- [23] Nashed G G L, Bamba K 2024 *Phys. Dark Univ.* **44** 101485
- [24] Bubuianu L, Vacaru S I, Veliev E V, Zhamysheva A 2024 *Eur. Phys. J. C* **84** 211
- [25] Lin R H, Chen X N, Zhai X H 2022 *Eur. Phys. J. C* **82** 308
- [26] Mota C E, Pretel J M Z, Flores C O V 2024 *Eur. Phys. J. C* **84** 673
- [27] Naseer T, Sharif M, Manzoor S, Fatima A 2024 *Mod. Phys. Lett. A* **39** 2450048
- [28] Matos I S, Calvão M O, Waga I 2021 *Phys. Rev. D* **103** 104059
- [29] Pauli W 1941 *Rev. Mod. Phys.* **13** 203
- [30] Yang C N, Mills R L 1954 *Phys. Rev.* **96** 191
- [31] Weinberg S 1972 *Phys. Rev. D* **5** 1412
- [32] Utiyama R 1956 *Phys. Rev.* **101** 1597
- [33] Kibble T W B 1961 *J. Math. Phys.* **2** 212
- [34] Zhao X, Ma Y G 2024 *Commun. Theor. Phys.* **76** 065403
- [35] Zhang H C, Xu L X 2019 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2019** 050
- [36] Zhang H C, Xu L X 2020 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **10** 003
- [37] Cembranos J A R, Valcárcel J G 2017 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1** 14
- [38] Giacconi R, Gursky H, Paolini F R, Rossi B B 1962 *Phys. Rev. Lett.* **9** 439
- [39] Baade W, Zwicky F 1934 *Phys. Rev.* **46** 76
- [40] Oppenheimer J R, Volkoff G M 1939 *Phys. Rev.* **55** 374
- [41] Schmidt M 1963 *Nature* **197** 1040
- [42] Shklovsky I 1967 *Astrophys. J.* **148** L1
- [43] Lundmark K 1921 *Publ. Astron. Soc. Pac.* **33** 225
- [44] Kardashev N 1964 *Astron. Zh.* **41** 807
- [45] Pacini F 1967 *Nature* **216** 567
- [46] Hewish A, Bell S J, Pilkington J D H, Scott P F, Collins R A 1968 *Nature* **217** 709
- [47] Gold T 1968 *Nature* **218** 731
- [48] Obukhov Y N 2006 *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **3** 95
- [49] Weyssenhoff J, Raabe A 1946 *Nature* **157** 766
- [50] Obukhov Y N, Korotky V A 1987 *Class. Quantum. Grav.* **4** 1633

Modification of TOV equation in Poincaré gauge gravity^{*}

GUO Zhengrui^{1) #} LIU Helei^{1) †} LV Guoliang^{1) #} MA Yongge^{1) 2)}

1) (*School of Physical Science and Technology, Xinjiang University, Urumqi 830046, China*)

2) (*School of Physics and Astronomy, Beijing Normal University, Beijing 100875, China*)

(Received 16 May 2025; revised manuscript received 11 July 2025)

Abstract

In recent years, Poincaré gauge gravity theory has attracted widespread attention and has been applied to the fields of gravitation and astrophysics. Therefore, how to distinguish between general relativity and Poincaré gauge gravity theory through experimental observations has become an important subject. The core of Poincaré gauge gravity theory is the introduction of torsion in spacetime. General relativity can be regarded as a special case of Poincaré gauge gravity theory in the absence of torsion. Neutron stars, as celestial bodies with extremely strong gravitational fields, serve as an ideal laboratory for Poincaré gauge gravity theory. At present, research on the properties of neutron stars based on the Poincaré gauge theory of gravitation is very scarce. In view of the significance of Poincaré gauge gravity theory, it is necessary to study the properties of neutron stars within the framework of this theory and check whether observations of neutron stars can be used to distinguish and test Poincaré gauge gravity theory and general relativity.

In this work, a specific gravitational field Lagrangian is chosen for Poincaré gauge gravity theory to derive the corresponding gravitational field equations. Based on these equations, the modified Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) equation is further derived for spherically symmetric static neutron stars. When the spacetime torsion is zero, the modified static neutron star TOV equation decreases precisely to the TOV equation in general relativity.

Then, the influence of torsion on the mass-radius relation of static neutron stars is investigated. Our analysis shows that in spherically symmetric spacetime, when the neutron star is static and only the spin tensor of particles is considered (the order of magnitude is 10^{-34}), the mass-radius relation of static neutron stars calculated by this theoretical model is consistent with the result in general relativity. This indicates that under static conditions, the correction effect of torsion on the mass-radius relation of neutron stars can be neglected.

This study is limited to static neutron star models under the condition of spherically symmetric spacetime metrics. However, in realistic astrophysical environments, neutron stars possess significant angular momentum. In the final section of this paper, the effect of neutron star rotation is discussed and the selected Poincaré gauge gravity model is found to be unsuitable for investigating the mass-radius relation of rotating neutron stars. This work provides a theoretical foundation and reference methods for further investigating the mass-radius relation of rotating neutron stars within the framework of Poincaré gauge gravity.

Keywords: Poincaré gauge gravity, torsion, neutron star, Tolman-Oppenheimer-Volkoff equation

PACS: 04.50.Kd, 04.40.Dg

DOI: [10.7498/aps.74.20250644](https://doi.org/10.7498/aps.74.20250644)

CSTR: [32037.14.aps.74.20250644](https://cstr.cn/32037.14.aps.74.20250644)

^{*} Project supported by the National Natural Science Fund of China (Grant No. 12263006), the Natural Science Fund of the Xinjiang Uyghur Autonomous Region, China (Grant No. 2024D01C52), and the Sub-topic of the Major Science and Technology Special Project of the Xinjiang Uyghur Autonomous Region, China (Grant No. 2022A03013-3) .

[#] These authors contributed equally.

[†] Corresponding author. E-mail: heleiliu@xju.edu.cn

庞加莱规范引力对TOV方程的修正

郭征瑞 刘荷蕾 吕国梁 马永革

Modification of TOV equation in Poincaré gauge gravity

GUO Zhengrui LIU Helei LV Guoliang MA Yongge

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 180401 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250644

CSTR: 32037.14.aps.74.20250644

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250644>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

强磁场对 neutron 星转动惯量与表面引力红移的影响

Effects of strong magnetic field on moment of inertia and surface gravitational redshift in neutron star

物理学报. 2021, 70(22): 222601 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211051>

利用含 δ 介子的相对论平均场理论研究 neutron 星潮汐形变性质

Study of tidal deformabilities of neutron stars using relativistic mean field theory containing δ mesons

物理学报. 2023, 72(2): 022601 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20221599>

克尔度规引力场对费米子的量子散射

Quantum scattering of fermion by gravitational field with Kerr metric

物理学报. 2022, 71(21): 210401 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220876>

铀材料快中子多重性测量方程推导

Derivation of fast neutron multiplicity measurement equation of uranium material

物理学报. 2022, 71(9): 091401 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211653>

人工规范场调控下的单光子散射

Single-photon scattering under control of artificial gauge field

物理学报. 2025, 74(8): 084205 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250021>

渐近安全引力下的黑洞阴影和光环

Shadow and photon ring of black hole in asymptotically safe gravity

物理学报. 2024, 73(1): 010401 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231233>